作用素論・作用素環論
研究集会予稿集

１９９５年１１月２７日より２９日まで

北海道大学学術交流会館

岸本　晶孝

Series #40. November, 1995

HOKKAIDO UNIVERSITY

TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯6: T.Yoshida (Ed.), 1987年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.

♯7: S. Izumiya, G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何" 研究集会報告集, 1988.

♯8: K. Kubota (Ed.), 第13回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.

♯9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.

♯10: I. Nakamura (Ed.), Superstring理論とK3曲面, 91 pages. 1988.

♯11: Y. Kamishima (Ed.), 1988年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.

♯12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.

♯13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987年7月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.

♯14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989

♯15: R. Agemi (Ed.), 第14回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.

♯16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.

♯17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.

♯18: A. Arai (Ed.), 1989年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.

♯19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.

♯20: R. Agemi (Ed.), 第15回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.

♯21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.

♯22: R. Agemi (Ed.), 第16回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.

♯23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.

♯24: K. Kubota (Ed.), 第17回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.

♯25: K. Takasaki, "非線型可積分系の数理" 1992.9.28～10.2 北海道大学での集中講義 講義録, 52 pages. 1993.

♯26: T. Nakazi (Ed.), 第1回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.

♯27: K. Kubota (Ed.), 第18回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.

♯28: T. Hibi (Ed.), 1992年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.

♯29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第2回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.

♯30: Y. Giga, Y.-G. Chen, 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.

♯31: K. Kubota (Ed.), 第19回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.

♯32: T. Ozawa (Ed.), 1993年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.

♯33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.

♯34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.

♯35: S. Miyajima, T. Nakazi (Eds.), 第3回関数空間セミナー報告集, 104 pages. 1995.

♯36: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 63 pages. 1995.

♯37: I. Tsuda (Ed.), The Second & Third Sapporo Symposium on Complex Systems, 190 pages. 1995.

♯38: M. Saito (Ed.), 1994年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquim Lectures, 100 pages. 1995.

♯39: S. Izumiya (Ed.), 接触幾何学と関連分野研究集会報告集, 186 pages. 1995.

作用素論・作用素環論研究集会予稿集

１９９５年１１月２７日より２９日まで
北海道大学学術交流会館にて開催

一部補助：　平成七年度科学研究費総合（Ａ）
代表者　小松彦三郎
分担者　岸本晶孝

目　次

Paths on Coxeter diagrams
—— Ocneanu 理論の紹介 ——

後藤 聡史
東京大学 数理科学

§1 Ocneanu の新理論と５つの問題

今回の講演は，今年の４月に Fields 研究所で行われた， A. Ocneanu による 連続講演の内容を紹介するものである．

Ocneanu は，この連続講演で，彼が 1987 年に導入した paragroup 理論（cf. [5]）を ３次元多様体の topological invariant などを構成する時に登場する Kauffman-Lins の Temperley-Lieb recoupling theory （[4]）と巧みに結び付けることによって，次のような５つの問題にたいして，彼の新たな方法が本質的に１つの明確な解答を与えることを示した．

Problem １． Jones-Okamoto subfactor (index $= 3+\sqrt{3}$ の subfactor) の dual principal graph と その fusion rule を与えよ．(さらに一般に Dynkin diagram A 型と A, D, Eの作る commuting square から生成される subfactor の場合にはどうなるか？)

Problem ２． Dynkin diagram E_6 から E_6 への 埋めこみに対する既約な biunitary connection は どのくらいあるのか？有限個か？また，可能ならばすべて列挙せよ．(さらに一般に，Dynkin diagram A, D, Eの自分自身への埋め込みの場合にはどうなるか？)

Problem ３． $N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_k \subset \cdots$ を principal graph が Dynkin diagram A_n 型の subfactor の Jones tower とする，これを $p \in N' \cap M_k$なる projection で tower を cut したとき $pNp \subset A \subset B \subset pM_kp$ となる intermediate subfactor $A \subset B$には，どの様なものが取れるか？ それは有限個か？ 分類できるのか？

Problem ４． Turaev-Viro type (triangulation によるもの) の ３次元 topological quantum field theory で， A_n 型の subfactor に対応するものと，全く同じ値を対応させるような A 型と対をなすような bimodule の system は，他にどんなものがあるか？

Problem ５． Cappelli-Itzykson-Zuber による modular invariant ([1]) はは Dynkin diagram A, D, E で分類されるが，それに対して，subfactor 理論の視点から新たな解釈を与えよ．

上の５つの問題のうち，３つが subfactor に関するものであり，残る２つのうち，１つはＴＱＦＴ（topological quantum field theory），もう１つはＲＣＦＴ（rational conformal field theory）に関するものである．

ここでは，時間の都合もあるので，上の５つの問題のうち，おもに **Problem １．** から **Problem ３．** について詳しく解説を行いたい．

§2 問題に対する解答

Problem 1. に対する解答.

E_6型の subfactor$N \subset M$に対して，その higher relative commutants $N' \cap M_k \subset N' \cap M_{k+1}$ の中には，自然に Jones projection だけから生成される$*$-subalgebra，$\{1, e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subset \{1, e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}\}$ が含まれており，これらがなす commuting square

$$\begin{array}{ccccc} \{1, e_1, e_2, \ldots, e_k\} & \subset & \{1, e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}\} & \cdots \longrightarrow & P \\ \cap & & \cap & & \cap \\ N' \cap M_k & \subset & N' \cap M_{k+1} & \cdots \longrightarrow & Q \end{array}$$

の tower から生成される subfactor（上の図の $P \subset Q$ ）が Jones-Okamoto subfactor と呼ばれるものである（[3]，[7]）．その principal graph は，Okamoto によって計算されているが，それは以下のようなものである．

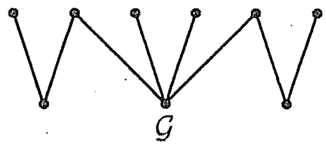

Figure 1:

principal graph は，わりあい簡単に求めることができるが，dual principal graph のほうは,（この場合簡単だが）一般には簡単には求められない．一般に principal graph とその fusion rule がわかっていても，dual principal graph を決定することは出来ないことが多い．しかし，subfactor が有限群から来る場合は，principal graph とその fusion rule が群の構造を決定してしまう．そこでこの場合は，principal graph の even vertex の表す $l^\infty(G)$ に，fusion rule から決まる $l^\infty(G)$ とは別の積構造（ここでは群の積）関する algebra（convolution algebra）つまり，G の群環 $\mathbf{C}(G)$ に移行する事によって dual principal graph が得られる．このような操作の行える別の例として，asymptotic inclusion と呼ばれる subfactor があげられる．

Ocneanu は，“essential path” という新たな概念を導入し，従来の paragroup 理論と Temperley-Lieb recoupling theory とを結び付け，それを拡張することによって，これと同様な操作が，Jones-Okamoto subfactor の場合（さらに一般の場合）にも適用できることを示した．

Problem 2. に対する解答.

ここで言う biunitary connection の既約性とは，その conneciotn から作られる subfactor の既約性を意味するものとする．ここで，$E_6 \to E_6$ の埋め込みに対する biunitary connection から生ずる subfactor$N \subset M$に対して，bimodule${}_N M_M = H$を generator として，Hと$\bar{H}$とを交互に tensor してそれを既約分解する事により，bimodule の system(paragroup) が生じるが，これらの既約 bimodule に対応する biunitary connecton がここで言う既約な biunitary connection である．こう考えると，様々な埋め込みを考え，そこから上述のように既約分解を行うことによって，埋め込み $E_6 \to E_6$ に対する既約 biunitary connection が生じることになり，それがどのくらいあるのかは明かではない．

$E_6 \to E_6$の埋め込みに対する biunitary connection として，現在わかっているものとしては，まず trivial な埋め込みに対する connection（この場合 index= 1 の subfactor$N \subset M$が生じる）の他に，2つの互いに coplex conjugate だが，同値でない flat biunitary connection（これらをそれぞれ W, W'とかくことにする）が存在する．Wまたは W'の片方だけから生成される既約 biunitary connection は，それぞれ principal graph E_6型の2つの互いに anti-isomrphic な subfactor の paragroup に対応するので，これらの既約 biunitary connection は principal graph E_6の各頂点でラベル付けされることがわかる．しかし，これで全てだろうか？

Ocneanu の解答は，次のようなものである．Wと W'の2つの connection の両方を generator として connection の合成（bimodule の tensor 積に対応する）を次々に行って，それらを既約分解して得られるもので，$E_6 \to E_6$の埋め込みに対する既約 biunitary connection は尽くされる．しかも，それらは有限個であり，それらは完全にリストアップできる．そして，この方法は一般の A, D, Eのそれ自身への埋め込みに対しても適用できる．

更に，その corollary として，E_6と E_8に対して，それぞれの2つの biunitary connection が flat であることや，E_7の biunitary connection の flat part が D_{10}であること（cf. [2]）も得られる，と Ocneanu は言っている．

Problem 3．に対する解答．

この問題も，以下のような Dynkin diagram A, D, E同士の埋め込みによる commuting square を考えることによって，問題となっている全ての intermediate subfactor $A \subset B$を列挙することができる．basic construction の projection による cut の仕方が無数にあるので，この場合，$A \subset B$の取り方は有限個とはならないが，それは本質的に下の commuting square の上下の graph $\mathcal{G}$と $\mathcal{H}$ の A, D, Eによるラベル付けによる場合分けにより，分類されるといってよい．

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{G} \\
\boxed{\phantom{\rule{3em}{3em}}} \\
\mathcal{H}
\end{array}
$$

Figure 2:

ここで注意すべきことは，graph $\mathcal{G}$と $\mathcal{H}$の Perron-Frobenius 固有値は同じ値でなければならないことである．中でもおもしろいものは，同じ Coxeter number を持つ A_{29}, D_{16}, E_8の3つで，この場合 A, D, Eの全てが組み合わせとしてとれる．そし

て，特に principal graph E_8の subfactor が A_{29}型の Jones tower から intermediate subfactor $A \subset B$としてとれることもわかる．E_6型の subfactor も，同様に，A_{11}型の Jones tower から intermediate subfactor として実現される．

興味のある方のために，以下に Problem 4，5に対する簡単な解答を書いておく．

Problem 4．に対する解答.

Problem 4にあるような Turaev-Viro type の 3次元 topological quantum field theory（[8]）は，同じ Coxeter number の Dynkin diagram $A.D.E$から来るものしかない，というのが答である．特に，A_{29}型の subfactor の場合，**Problem 2．**の解答にあったような，2つの互いに complex conjugate な E_8型の biunitary connection の両方を generator として生じる bimodule の system が，A_{29}型と同じ値を与えるＴＱＦＴとなっていることがわかる．

Problem 5．に対する解答.

modular invariant は Dynkin diagram A, D, E で分類されるが，これに対して，subfactor 理論の視点から新たな解釈を与えよ．ということだが，Ocneanu が Problem 2に与えた解答の所で出てきたような，A, D, Eの 1つの flat biunitary connection とその complex conjugate との2つを generator として生じる既約 biunitary connection（既約 bimodule ）の system を作り，その fusion rule から描かれる graph を使うと，modular invariant の新たな解釈ができるらしい．

以上のことについて，より詳しくは今後 Fields Institute から出版予定の Ocneanu の講義録（[6]）を参照して下さい．

References

[1] A. Cappelli, C. Itzykson, & J.-B. Zuber, *The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Comm. Math. Phys. **113** (1987). 1–26.

[2] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *The E_7 commuting squares produce D_{10} as principal graph*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **30** (1994). 151–166.

[3] F. Goodman, P. de la Harpe, & V. F. R. Jones. "Coxeter graphs and towers of algebras", MSRI publications 14, Springer, 1989.

[4] L. H. Kauffman & S. Lins, *Temperley-Lieb recoupling theory and invariants of 3-manifolds*, Ann. Math. Studies **133**, Princeton University Press, 1995.

[5] A. Ocneanu, "Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors", University of Tokyo Seminary Notes 45. (Notes recorded by Y. Kawahigashi), 1991.

[6] A. Ocneanu, "Paths on Coxeter Diagrams: From Platonic Solids and Singularities to Minimal Models and Subfactors",(recorded by Y. Kawahigashi and S. Goto), to appear.

[7] S. Okamoto, *Invariants for subfactors arising from Coxeter graphs*. in "Current Topics in Operator Algebras," World Scientific Publishing. (1991). pp. 84–103.

[8] V. G. Turaev & O. Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology, **31** (1992), 865–902.

コンパクト群のコホモロジー変形

山上 滋

量子群というのは作用素環的立場からは Hopf *-代数の一種と見ることができます。量子群以前の作用素環的 Hopf 代数の研究は主として群の双対性の一般化に力点が置かれ抽象的な話題が中心でした。Woronowicz が量子群を発見するに致った動機も双対性の追求にあったと聞きます。

群を Hopf 代数の一種と捉えるときすぐ問題になるのは、群 (およびその双対) と異なる Hopf 代数の存在です。群が Hopf 代数のほんの一部に過ぎないことは直観的には明らかですが、いざそのような例を作るとなるとなかなかに面倒です。最初の組織的な構成法は、筑波大の竹内氏により始められ、後に Majid により双接合積の理論として再発見されました。この理論は、群 G とその部分群 $H, K \subset G$ に対して、2つの接合積 $L^\infty(H\backslash G) \rtimes H$, $L^\infty(K\backslash G) \rtimes K$ の間に Hopf 代数としての pairing が作れるための条件を探求したもので、得られた結論は $G = HK$, $H \cap K = \{e\}$ ならば Ok というものでした。

これを双加群的に解釈すれば次のようになります。簡単のために G は有限群とし、${}_H\ell^2(G)_K$ という H-K 加群を考えます。これが depth 2 になるための条件、すなわち

$$ {}_H\ell^2(G) \otimes_K \ell^2(G) \otimes_H \ell^2(G)_K \text{ は } {}_H\ell^2(G)_K \text{ の直和に同型} $$

という条件を書き直してみると、双接合積の条件 $G = HK$, $H \cap K = \{e\}$ と完全に一致することが分かります。${}_H\ell^2(G)_K$ は群としての双加群でしたが、接合積を経由することにより作用素環としての双加群に昇格させることができます。すなわち、G の AFD II_1-factor R への外部自己同型作用 $\alpha : G \to Aut(R)$ を用意して双加群

$$ {}_{R\rtimes H}L^2(R) \otimes \ell^2(G)_{R\rtimes K} $$

を考えればよろしい。これは Jones 指数理論本来の意味で depth 2 になっています。ここでの要点は、${}_H\ell^2(G)_K$, ${}_{R\rtimes H}L^2(R) \otimes \ell^2(G)_{R\rtimes K}$ ともに同型な tensor categgory を生成するところにあります。

以上の群一接合積の対応は一般の局所コンパクト群 G とその閉部分群 H, K におきかえて考えることも可能ですが、双加群を接合積に昇格させることによって見えて

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

くるもう一つの拡張の仕方をここでは考えることにします。それは、自己同型作用のコサイクルによる摂動です。

具体的に考えるために、H の $\mathbb{T}$-valued 2 コサイクル (multiplier ともいう) $c(h,h')$ をとってきます。さらに、R のユニタリーの集団 $\{u(h)\}_{h\in H}$ で条件

$$u(h)\alpha_h(u(h')) = c(h,h')u(hh')$$

をみたすものを用意します。(R の一意性を使えば、このような集団の存在がわかります。) このとき

$$\{\beta_h = Ad\,u(h)\circ\alpha_h\}$$

が再び R の自己同型作用になるのでβ を α のコサイクルによるある種の摂動であるとみなすと、このような摂動の後も $L^2(R)\otimes\ell^2(G)$ は $R\rtimes H$-$R\rtimes K$ 加群の構造を持ち続け depth 2 の条件も満たされます。(注：接合積と固定点環との間にはある種の双対関係が成り立ち、それを介して上記双加群を部分因子環の形に書き直せば $R^K\subset R\rtimes_\beta H$ となります。)

さて以上の背景をふまえて、H (または K) を離散部分群という条件にゆるめます。このようにしても双接合積の構成方法はそのまま適用可能ですが、対応する接合積双加群は Jones 指数が無限大に発散してしまいます。このような状況でもある種の正則性 (discreteness or compactness) のもとで Kac 代数を作り出すことができる (Ocneanu の特徴付の一般化) ことが知られています。今の場合、

$$_{R\rtimes H}L^2(R)\otimes\ell^2(G)_{R\rtimes K}$$

はこの正則性をみたすので、離散 Kac 代数が出現します。離散 Kac 代数は、離散 Hopf C*-代数といってもほとんど同じことなので、双対をとってコンパクト Hopf C*-代数、すなわちコンパクト量子群が構成されました。

以上の拡張を具体的な場合、例えば $G=(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})\rtimes\mathbb{Z}_2$, $H=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $K=\mathbb{Z}_2$ について実行してみると、

$$\begin{aligned}\text{discrete algebra}:&\quad C^*(\mathbb{T}^2\rtimes\mathbb{Z}_2)\\ \text{compact algebra}:&\quad C^*(H)\oplus C^*(\{u,v;uv=e^{i\theta}vu\})\end{aligned}$$

となって、コンパクト群 $\mathbb{T}^2\rtimes\mathbb{Z}_2$ の構造が $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ のコサイクル $e^{i\theta}$ の存在によって真に変形されていることがわかります。

講演では、こうして得られるコンパクト群のコホモロジー変形についてその淡中双対の構造を中心に解説する予定です。

Noncommutative Euler Characteristic and its Applications

H. TAKAI (T.M.U.)

In topology, one of the most famous and important invariants is the so-called Euler (or Euler-Poincaré) characteristic, which is defined as the alternative sum of the Betti numbers of finite CW-complex . Even in noncommutative topology, a generalized notion of Euler characteristic of C*-algebras is well understood in terms of their K-theory. Namely, it is defined as the integer of subtracting torsion-free rank of K_1-theory from that of K_0-theory. It also has many nice properties since K-theory does. There exist many examples of simple C*-algebras whose Euler characteristics are arbitrary given integers, so that one may ask how to classify simple C*-algebras with Euler characteristic of a given integer.

In this talk, we shall answer partially the above problem in the case of separable simple nuclear C*-algebras with semi-finite traces. Our first theorem is the following:

<u>Theorem 1.</u> Let A be a separable simple nuclear C*-algebra with semi-finite trace and let $\chi(A)$ be the Euler characteristic of A. Then $\chi(A) = 0$ if and only if there exists a C*-dynamical system $(B, \mathbb{Z}, \alpha)$ such that (i) B is strongly amenable with $\chi(B) \in \mathbb{Z}$ and (ii) A is stably isomorphic to $B \times_\alpha \mathbb{Z}$.

<u>Remark1.</u> Even if A is purely infinite, the above theorem would be true although $\chi(B) \in \mathbb{Z}$ is false in general, by taking $A = \mathcal{O}_n$ $(n \geq 2)$

the Cuntz algebra with n-isometries, $B = M_{n^\infty} \otimes \mathbb{K}$ and α is the shift automorphism of B.

<u>Remark 2.</u> In the case of non nuclear C*-algebras, nothing is known about the statement as Theorem 1 except several examples with zero Euler characteristic.

<u>Remark 3.</u> In the case of simple nuclear C*-algebras with non zero Euler characteristics, several examples are constructed having the numbers.

The theorem can be proved by combining the following several key lemmas:

<u>Lemma I.</u> Let $(B, \mathbb{Z}, \alpha)$ be a C*-dynamical system where α is aperiodic. Suppose $\chi(B) \in \mathbb{Z}$, then $\chi(B \times_\alpha \mathbb{Z}) = 0$.

<u>Lemma II (with K.Matsumoto)</u> Let A be a separable simple nuclear C*-algebra with semi-finite trace. Suppose A has Property T, then A is a matrix algebra.

<u>Lemma IV</u> Let A be a separable strongly amenable C*-algebra without PropertyT, then there exists a partial isometry $u \in M(A)$ and a strongly amenable C*-subalgebra B of A such that (i) $uBu^* = B$, and (ii) $C^*(B,u)$ is a hereditary C*-subalgebra of A.

In what follows, we study simple C*-algebras with negative Euler characteristics. One of the prototype of such C*-algebras is the reduced C*-algebras of the free groups with n-generators. Then their Euler characteristics are $1-n$. We generalize this fact for $n=2$, in other words we seek sufficient conditions for C*-algebras under which their Euler characteristics are -1.

Let A be a unital separable simple C*-algebra with unique tracial state τ. Suppose there exists a C*-dynamical system (A,T^2,α) such that (i) $A'' \cap (A^\alpha)' = \mathbb{C}$ and (ii) there exist two unitaries $u \in A^\alpha(1,0)$ and $v \in A^\alpha(0,1)$. There are several examples satisfying the above situations. We then have the following theorem:

<u>Theorem 2.</u> Under the above situations, $\chi(A) = -1$.

<u>Corollary 3.</u> $\chi(Cr^*(F_2)) = \chi(A(F_2) \times_\alpha F_2) = -1$ where $Cr^*(F_2)$ is the reduced C*-algebra of the 2-free group F_2 and α is the quasi-free action of F_2 on the CAR-algebra $A(F_2)$ based on F_2.

<u>Remark.</u> It is no longer true in general that $\chi(A) = 1-n$ for a C*-dynamical system (A,T^n,α) with (i) and (ii') unitaries $u_j \in A^\alpha(0,1,0)$ $(1 \leq j \leq n)$ where $(0,1,0)$ is the n-tuple with 1 at j-site and 0 at i-site $(i \neq j)$. For instance, take the gauge action of T^{2g} on the reduced C*algebra $Cr^*(\Gamma_g)$ based on the fundamental group Γ_g of closed Riemann surface with genus g (≥ 2). Then $\chi(Cr^*(\Gamma_g)) = 2-2g$.

Let $H_\lambda{}^*(A^\infty)$ be the cyclic cohomology of the smooth part A^∞ of A and $H^*(A^\infty) = \lim (H_\lambda{}^*(A^\infty), S) = H_\lambda{}^*(A^\infty) \otimes_{H\lambda^*(\mathbb{C})} \mathbb{C}$.

The basic key lemmas are as follows:

<u>Lemma I.</u> Under the same situation as Theorem 2, $H^*(A^\infty)$ is the following:

$$H^{ev}(A^\infty) = \mathbb{C}[\tau] \quad \text{and} \quad H^{odd}(A^\infty) = \mathbb{C}[\tau_1] \oplus \mathbb{C}[\tau_2]$$

where $\tau_j(a,b) = \tau(a\delta_j(b))$ for $a,b \in A^\infty$ and the generators δ_j of the action α of T^2.

<u>Lemma II.</u> Under the same situation as Theorem 2, we have that

$$\chi(A) = \dim_{\mathbb{C}} H^{ev}(A^\infty) - \dim_{\mathbb{C}} H^{odd}(A^\infty).$$

<u>References</u>

[B] B.Blackadar: K-theory for Operator Algebras, Publ.M.S.R.I., 5 Springer (1986).

[C] A.Connes: Non Commutative Differential Geometry, Publ.Math. I.H.E.S., 62 (1986), 257-360.

C^*-環の BUNDLE とその接続について

大内本夫　（大阪女子大学）

1. Introduction. 有限次元 vector bundle $\pi : E \to M$ の continuous cross sections 全体 $C(E)$ は $C(M)$ 上の finitely generated projective module になっている。C^*-環における K-theory や finitely generated projective module の理論は このような $C(M)$-module $C(E)$ の非可換化であると考えることができる。一方、C^*-環の continuous field は Dixmier-Douady の理論以来様々な形で研究されてきた。(see [4,5,6,7,8,9,10,13,17]) continuous field の多くの例においては、多様体上の field を考えている。従ってそれらの例にたいして、微分幾何学的な研究をおこなうことは不自然なことではない。本講演においては、多様体上の C^*-環の continuous field を C^*-環を fiber とする vector bundle と考え、それにたいして、接続などの微分幾何学的概念を適用することを試みる。

locally trivial な C^*-環の bundle を [14] で、横断的な作用を持つ可換な可微分力学系に付随した C^*-環の bundle を [15] で研究した。しかし、もっと幅広い例を考察するためにはより一般的な C^*-環の bundle を考察する必要がある。ここでは、１つの試みとして、そのための枠組みとなる Hilbert 空間の bundle と C^*-環の bundle を定義したい。以下 M は C^∞ 級実多様体とする。

2. Bundles of Hilbert spaces. $u \in M$ にたいして、H_u を Hilbert 空間、$<\cdot,\cdot>_u$ を内積とする。Hilbert 空間の bundle H は disjoint union

$$H = \cup_{u \in M} H_u$$

で定義される。$\tilde{\mathcal{D}}$ を H の cross section の作るある $C^\infty(M)$-module で、$\xi, \zeta \in \tilde{\mathcal{D}}$ にたいして関数

$$<\xi, \zeta>: u \in M \mapsto <\xi_u, \zeta_u>_u$$

が C^∞ 級になるものとする。線形写像

$$\tilde{\nabla} : \tilde{\mathcal{D}} \to \Gamma(T^*M) \hat{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}$$

が次の条件を満たしているとき接続と呼ぶ。

$$\begin{aligned} &\tilde{\nabla}(f\xi) = df \otimes \xi + f\tilde{\nabla}\xi \\ &\tilde{\nabla}_X \xi \in \tilde{\mathcal{D}} \\ &\quad \text{for } \xi \in \tilde{\mathcal{D}},\ f \in C^\infty(M),\ X \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

$\tilde{\nabla}$ が次の性質を満たしているとき、fiber metric $<\cdot,\cdot>$ を preserve すると言う。

$$X <\xi, \zeta> = <\tilde{\nabla}_X \xi, \zeta> + <\xi, \tilde{\nabla}_X \zeta>$$
$$\text{for } \xi,\ \zeta \in \tilde{\mathcal{D}},\ X \in \Gamma(TM)$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

3. Bundles of C^*-algebras. $u \in M$ にたいして、B_u を C^*-環とする。C^*-環の bundle は disjoint union

$$B = \cup_{u \in M} B_u$$

で定義される。$\mathcal{D}$ を B の cross section の作るある$*$-algebra かつ $C^\infty(M)$-module であるとする。線形写像

$$\nabla : \mathcal{D} \to \Gamma(T^*M) \hat{\otimes} \mathcal{D}$$

が次の条件を満たしているとき接続と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
&\nabla(fx) = df \otimes x + f \nabla x \\
&\nabla(xy) = (\nabla x) y + x (\nabla y) \\
&\nabla(x^*) = (\nabla x)^* \\
&\nabla_X x \in \mathcal{D} \\
&\text{for } x \in \mathcal{D},\ f \in C^\infty(M),\ X \in \Gamma(TM)
\end{aligned}$$

∇ と $\tilde{\nabla}$ の間には次の関係がある。

Proposition. B_u は $\mathcal{B}(H_u)$ の C^*-部分環であり、$x\xi \in \tilde{\mathcal{D}}$ *for* $x \in \mathcal{D}$, $\xi \in \tilde{\mathcal{D}}$ であると仮定する。

$$\nabla : \mathcal{D} \to \Gamma(T^*M) \hat{\otimes} \mathcal{D}$$

は $\nabla_X x \in \mathcal{D}$ *for* $x \in \mathcal{D}$, $X \in \Gamma(TM)$ を満たす線形写像、

$$\tilde{\nabla} : \tilde{\mathcal{D}} \to \Gamma(T^*M) \hat{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}$$

は *fiber metric* を保存する接続であるとする。このとき

$$\tilde{\nabla}(x\xi) = (\nabla x)\xi + x(\tilde{\nabla}\xi) \qquad (x \in \mathcal{D},\ \xi \in \tilde{\mathcal{D}})$$

ならば ∇ は接続である。

4. Examples. (1) $M = S^1$, $H_u = \mathbb{C}^2$, $B_u = M_2$, $\tilde{\mathcal{D}} = C^\infty(S^1, \mathbb{C}^2)$, $\mathcal{D} = C^\infty(S^1, M_2)$.

$$\tilde{\nabla}\xi = du \otimes \left(\frac{d\xi}{du} + A\xi \right), \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & c \end{pmatrix}$$

$a, b, c \in C^\infty(S^1)$, $a(u), c(u) \in i\mathbb{R}$.

$$\nabla x = du \otimes \left(\frac{dx}{du} + [A, x] \right)$$

(2) $M = \mathbb{T}^2$, $H_u = L^2(\mathbb{R})$. $\mathbb{R}$ は $\mathbb{T}^2$ に角度 θ の Kronecker flow として作用している。$B_u = \rho_u(C_r^*(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}))$, $\tilde{\mathcal{D}} = C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2)$, $\mathcal{D}$ は $cs(f) : u \mapsto \rho_u(f)$ $(f \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2))$ によって生成される $C^\infty(\mathbb{T}^2)$-module. $\mu \in \mathbb{Q}$ とする。

$$\tilde{\nabla}\xi = du_1 \otimes \left(\frac{-\mu}{\mu - \theta} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \right) + du_2 \otimes \left(\frac{1}{\mu - \theta} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial u_2} \right)$$

$$\nabla cs(f) = \left(\frac{-\theta}{\mu - \theta} du_1 + \frac{1}{\mu - \theta} du_2 \right) \otimes cs \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} + \mu \frac{\partial f}{\partial u_2} \right)$$

References

[1] M. F. Atiyah, *K-Theory*, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.

[2] A. Connes, *C^* algèbres et géométrie différentielle*, C. R. Acad. Sc. Paris **290** (1980), 599–604.

[3] ———, *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. Sympos. Pure Math. **38** (1982), 521–628.

[4] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[5] G. A. Elliott, *Gaps in the spectrum of an almost periodic*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **4** (1982), 255–259.

[6] ———, *Gaps in the spectrum of an almost periodic Schrödinger operator. II*, Geometric methods in operator algebras (H. Araki and E. G. Effros, eds.), Longman Scientific & Technical, Harlow, 1986, pp. 181–191.

[7] B. D. Evans, *C^*-bundles and compact transformation groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. 269, Amer. Math. Soc., Providence, 1982.

[8] J. M. G. Fell and R. S. Doran, *Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles. Volume 1*, Academic Press, San Diego, 1988.

[9] ———, *Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles. Volume 2*, Academic Press, San Diego, 1988.

[10] U. Haagerup and M. Rørdam, *Perturbations of the rotation C^*-algebras and of the Heisenberg commutation relation*, preprint.

[11] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 1994.

[12] 小林昭七, 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 東京, 1989.

[13] V. Nistor, *Fields of AF-algebras*, J. Operator Theory **28** (1992), 3–25.

[14] M. O'uchi, *On a one-parameter group of automorphisms associated with a flat connection in a differentiable bundle of C^*-algebras*, Math. Japon. **36** (1991), 1179–1191.

[15] ———, *A differentiable structure for a bundle of C^*-algebras associated with a dynamical system*, Pacific J. Math **168** (1995), 291–311.

[16] M. A. Rieffel, *C^*-algebras associated with irrational rotations*, Pacific J. Math. **93** (1981), 415–429.

[17] ———, *The cancellation theorem for projective modules over irrational rotation C^*-algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **47** (1983), 285–302.

[18] ———, *Continuous fields of C^*-algebras coming from group cocycles and actions*, Math. Ann. **283** (1989), 631–643.

[19] N. Steenrod,, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, New Jersey, 1951.

Products of two self-adjoint operators

吉 国興　　新潟大学大学院自然科学研究科

1 Introduction

Let H be a separable complex Hilbert space, and denote by $B(H)$ the set of all bounded linear operators on H. Let T, $X \in B(H)$. Then $T \sim X$ will mean that T is similar to X, that is, there exists an invertible operator S such that $T = S^{-1}XS$. We define the similarity orbit $S(T)$ of T by $S(T) = \{X \in B(H) : X \sim T\}$. If A and B are self-adjoint operators in $B(H)$, then it is known that AB is similar to the adjoint BA if H is finite dimensional. However this is not necessarily true if the dimension of H is infinite [1,2]. In [1], Radjavi and Williams conjectured the following:

Conjecture 1.1(Radjavi and Williams). An invertible operator T on H is a product of two self-adjoint operators if and only if T is similar to T^*.

As a partial result, they proved the following theorems.

Theorem 1.2 (Radjavi and Williams). If H is a finite dimensional Hilbert space, then an operator T is a product of two self-adjoint operators if and only if T is similar to its adjoint T^*.

Theorem 1.3 (Radjavi and Williams). T is unitarily equivalent to its adjoint T^* if and only if T is the product of a symmetry and a self-adjoint operator.

J. Gray also in [2] conjectured that a product of two self-adjoint Fredholm operators is similar to its adjoint and proved the following theorem.

Theorem 1.4 (Gray). If A and B are self-adjoint, Fredholm, and $A \geq 0$, then $AB \sim BA$.

However, the conjecture is still open.

2 Approximation by products of two positive operators

Recently, M. Khalkhali, C. Laurie, B. Mathes and H. Radjavi in [5] and D. Hadwin in [6] studied approximation problem by products of two positive operators. Let $\mathcal{P}_2$ denote the set of operators on H that can be written as the product of two positive operators. In [5], Radjavi etc studied the norm closure of $\mathcal{P}_2$. Membership in $\overline{\mathcal{P}}_2$ was characterized for certain classes of operators.

Theorem 2.1 (Radjavi. etc). If T is one of the following operators:

(1). quasinilpotent operators,

(2). polynomial compact operators such that $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$,

(3). normal operators such that every component of $\sigma(T)$ intersects $\mathbb{R}^+$,

then $T \in \overline{\mathcal{P}}_2$.

Hadwin in [6] completely characterized $\overline{\mathcal{P}}_2$.

Theorem 2.2 (Hadwin). The following are equivalent for an operator T.

(1). $T \in \overline{\mathcal{P}}_2$.

(2). $T \in \{A : \sigma(A) \subset \mathbb{R}^+\}^-$.

(3). T is biquasitriangular, and each component of $\sigma_e(T) \cup \sigma_0(T)$ intersects $\mathbb{R}^+$.

3 Approximation by products of two self-adjoint operators

In this section, we shall consider a class of operators which are approximated by products of two self-adjoint operators. Let $\mathcal{S}_2 = \{AB : A, B \in B(H), A = A^*, B = B^*\}$ and $\Psi = \{T \in B(H) : T \sim T^*\}$ respectively. Then we know that both $\mathcal{S}_2$ and Ψ are invariant under similarity transformation $T \to S^{-1}TS$ for every invertible operator S in $B(H)$. Observe that if T is invertible and if $T \in \mathcal{S}_2$, then $T \in \Psi$. However whether the converse is valid is an open problem. Now we consider an asymptotic form. That is, we shall prove that the norm closures of $\mathcal{S}_2$ and Ψ coincide in $B(H)$.

We next recall some symbols which can be found in [3]. The symbols $\sigma(T)$, $\sigma_e(T)$ and $\sigma_0(T)$ denote the spectrum, essential spectrum and normal eigenvalues of T respectively. If $\lambda \in \sigma_0(T)$, we denote by $H(\lambda, T)$ the corresponding Riesz spectral subspace. Recall that T is a semi-Fredholm operator if T has closed range and at least one of the numbers $dim(kerT)$, $dim(kerT^*)$ is finite. If T is semi-Fredholm, then we define the index of T, denoted $ind\ T$ by $ind\ T = dim(ker\ T) - dim(ker\ T^*)$. The semi-Fredholm domain of T, denoted $\rho_{s-F}(T)$ is the set $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\ - T$ is semi-Fredholm $\}$. Let $\rho^n_{s-F}(T) = \{\lambda \in \rho_{s-F}(T) : ind(\lambda - T) = n\}(-\infty \leq n \leq +\infty)$.

The following proposition is important.

Proposition 3.1. Suppose that T satisfies the following conditions (i)-(iv):

(i). Every component of $\sigma(T)$ intersects $\sigma(T^*)$;

(ii). every component of $\sigma_e(T)$ intersects $\sigma_e(T^*)$;

(iii). $\rho^n_{S-F}(T) \cap \rho^m_{S-F}(T^*) = \emptyset$ ($n \neq m$);

(iv). $dimH(\lambda, T) = dimH(\lambda, T^*)$ for every $\lambda \in \sigma_0(T) \cap \sigma_0(T^*)$.

Then $T \in \overline{\mathcal{S}}_2$.

In fact, Proposition 3.1 exactly gives a spectral characterization of $\overline{\mathcal{S}}_2$. Let Θ be the set of all operators satisfying the conditions (i)-(iv) of Proposition 3.1.

Theorem 3.2. $\overline{\mathcal{S}}_2 = \overline{\Psi} = \Theta$.

Theorem 3.2 shows that an operator T in $B(H)$ is approximated by products of two self-adjoint operators if and only if T is approximated by operators which are similar to their own adjoints , which is an asymptotic form about Conjecture 1.1.

We next give some examples showing that the conditions (i)-(iv) of Proposition 3.1 are mutually independent. Let $\{e_n\}_{n=0}^{+\infty}$ be an orthogonal basis of H.

Example 3.3. Define $Ke_0 = ie_0$ ($i^2 = -1$) and $K\{e_0\}^\perp = 0$. It is clear that $\sigma(K) = \{0, i\}$, $\sigma(K^*) = \{0, -i\}$ and $\sigma_e(K) = \sigma_e(K^*) = \{0\}$.

Clearly, $\{i\}$ is a component of $\sigma(K)$ and $\{i\} \cap \sigma(K^*) = \emptyset$, thus K does not satisfy the condition (i) and satisfies other conditions of Proposition 3.1.

Similarly, define N by $Ne_0 = ie_0$, $Ne_n = -ie_n$ $(n = 1, 2\ )$ and $Ne_n = 0$ for $n \geq 3$. Then N does not satisfy the condition (iv) and satisfies other conditions of Proposition 3.1.

Example 3.4. Let U be the unilateral shift defined by $Ue_n = e_{n+1}$ ($n =$ 0, 1, 2,...). Then we know that $\sigma(U) = \sigma(U^*) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ and $\sigma_e(U) = \sigma_e(U^*) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$. However, $\rho_{S-F}^{-1}(U) = \rho_{S-F}^{1}(U^*) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$. Thus U does not satisfy the condition (iii) and satisfies other conditions of Proposition 3.1.

Let $U_1 = i + (U \oplus U^* \oplus Q)$, where Q is a non-compact quasinilpotent operator. Then U_1 does not satisfy the condition (ii) and satisfies other conditions of Proposition 3.1.

By Theorem 3.2, K, N, U and U_1 are not in $\overline{\mathcal{S}}_2$.

From [1, 2], we know that a product of two self-adjoint operators does not have to be similar to its adjoint, but we have the asymptotic similarity.

Theorem 3.5. If T in $B(H)$ is a product of two self-adjoint operators then T and T^* are asymptotically similar, that is, $T^* = \lim S_n^{-1} T S_n$ for a suitable invertible operator sequence $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ of $B(H)$.

4 Products of n self-adjoint operators

As in the case of $\mathcal{S}_2$ ($\mathcal{P}_2$), let $\mathcal{S}_n$ ($\mathcal{P}_n$) denote the set of operators on H that can be written as the product of n self-adjoint (positive) operators. It is clear that $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{S}_n$. Pei Yuan Wu in [7] gave a characterization of $\mathcal{S}_n$ and $\mathcal{P}_n$.

Theorem 4.1 (Wu). The following are equivalent for an operator T.

(1). $T \in \mathcal{P}_n$ for some n.

(2). $T \in \mathcal{S}_n$ for some n.

(3). $dimkerT = dimkerT^*$ or $Ran(T)$ is not closed.

Moreover, in this case, th number of self-adjoint factors may be limited to 6, that of positive factors to 18.

Radjavi etc in [5] studied the norm closure of $\mathcal{P}_n$. They proved $\overline{\mathcal{P}}_2 \subsetneqq \overline{\mathcal{P}}_3 \subsetneqq \overline{\mathcal{P}}_4$ and $\overline{\mathcal{P}}_5 = \overline{\mathcal{P}}_n$ for $n \geq 5$. Does $\overline{\mathcal{P}}_4 = \overline{\mathcal{P}}_5$? D. Hadwin in [6] answered this problem.

Theorem 4.2 (Hadwin). $\overline{\mathcal{P}}_4 = \overline{\mathcal{P}}_5$.

On the norm closure of $\mathcal{S}_n$, we have similar relationships.

Proposition 4.3.

(1). $\overline{\mathcal{P}}_n \subsetneqq \overline{\mathcal{S}}_n$, n =2, 3.

(2). $\overline{\mathcal{P}}_4 = \overline{\mathcal{S}}_4 = \overline{\mathcal{P}}_n = \overline{\mathcal{S}}_n$, $n \geq 4$.

(3). $\overline{\mathcal{S}}_2 \subsetneqq \overline{\mathcal{S}}_3 \subsetneqq \overline{\mathcal{S}}_4$.

Acknowledgement. I would like to thank Professor Kichi-Suke Saito for his helpful guidance and encouragement.

References

[1] H. Radjavi, J. P. Williams, Products of self-adjoint operators. Michigan Math. J, 168(1969), 177-185.

[2] L.J. Gray, Products of Hermitian operators. Proc. Amer Math. Soc. 59(1976), 123-126.

[3] D. A. Herrero, Approximation of Hilbert space operators. Vol 1, Pitman Research Notes in Mathematics Series, No. 72, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[4] C. Aprostol, A. Fialkow, D. A. Herrero and D. Voiculescu, Approximation of Hilbert space operators. Vol 2, Pitman Research Notes in Mathemaics Series, No. 102, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[5] M. Khalkhali, C. Laurie, B. Mathes and H. Radjavi, Approximation by products of positive operators. J, Operator Theory, 29(1993), 237-247.

[6] D. Hadwin, Limits of products of positive operators. Bull. London Math. Soc. 27(1995)479-482.

[7] Pei Yuan Wu, The operator factorization problems. Linear Algebra Appl.117(1989)35-63.

Subnormal operator の dual について

斉藤 功　　　　東京理科大学 理学部

H を complex Hilbert space, $B(H)$ を H 上の bounded linear operator の全体とする。$A \in B(H)$ が pure であるとは A の reducing subspace M で $A|M$ が normal となるものが $\{0\}$ のみであることをいい、$S \in B(H)$ が subnormal であるとは H を含む Hilbert space K と normal operator $N \in B(K)$ が存在して $NH \subseteq H$, $S = N|H$ となることである。また、$Q \in B(H)$ が quasinormal とは、$Q|Q| = |Q|Q$ となることをいう。

いま、$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, $N = \begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$ on $K = H \oplus H^\perp$ を S の minimal な normal extension とする。このとき N は S により unitary 同型の意味で一意に定まる。よって T も S により unitary 同型の意味で一意に定まる。

J. B. Conway [2] はこの T を S の dual と定めた。そして $S \cong T$ のとき、S を self-dual subnormal operator とした。また C. C. Huang [3] は、次を示した。

Huang の 定 理

$S \in B(H)$ を self-dual subnormal operator で $S^*S - SS^*$ が finite rank operator となり、$S^*|\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*)$ が normal となるものとする。そのとき、 normal operator $N_0 \in B(H)$ と quasinormal operator $Q \in B(H)$ が存在して $N_0Q = QN_0$, $S = N_0 + Q$ となる。

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, そして

$$\begin{aligned} A &:= (S^*S - SS^*)^{1/2}|\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*), \\ B &:= S^*|\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*). \end{aligned}$$

とすると、A と B は S の unitary invariants の complete system を形成することが知られている。この A と B により S と S の dual T を表現できるが、そのためには、次の安藤の定理が必要となる。H 上の self-adjoint operator T に対し　ran $T \oplus$ ker T から H への densely defined operator T^{-1} を $T^{-1}T = P, T^{-1}(I-P) = 0$ で定義する。ただし、P は H から cl ran T への orthogonal projection とし、cl ran T は、T の range の closure とする。この T^{-1} を T の partial inverse と呼ぶ。また densly defined operator S が bounded なとき、その bounded extension も同じ記号 S で表す。

安 藤 の 定 理

$S \in B(H)$ を subnormal operator とする。次の式より、$A_n, S_n \in B(H)$ を帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad S_0 = S, \\ A_n &= (A_{n-1}^2 + S_{n-1}^*S_{n-1} - S_{n-1}S_{n-1}^*)^{1/2}, \\ S_n &= A_nS_{n-1}A_n^{-1}, \end{aligned}$$

ただし、A_n^{-1} は、A_n の partial inverse とする。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$A_{n-1}^2 + S_{n-1}^* S_{n-1} - S_{n-1} S_{n-1}^* \geq 0,$$

$$S_n A_n = A_n S_{n-1}$$

が、成立し $A_n S_{n-1} A_n^{-1}$ は、有界となる。そして $H \oplus H \oplus H \oplus H \oplus \cdots$ 上の operator

$$N := \begin{pmatrix} S & A_1 & & & \\ & S_1 & A_2 & & \\ & & S_2 & A_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

は、bounded normal operator となり、ノルムは $\|S\|$ と等しい。つまり、N は、S の normal extension となる。

安藤の定理を使って、 pure subnormal operator の *minimal* normal extension が得られ、よって dual が得られる。ただし、以下、 A, B は前述のものとする。

<u>定　理</u>

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, そして次の式より、$C_n, D_n \in B(H)$ を帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} C_1 &= A, \quad D_1 = AB^*A^{-1}, \\ C_n &= (C_{n-1}^2 + D_{n-1}^* D_{n-1} - D_{n-1} D_{n-1}^*)^{1/2}, \\ D_n &= C_n D_{n-1} C_n^{-1}, \end{aligned}$$

ただし、C_n^{-1} は、C_n の partial inverse とする。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$C_{n-1}^2 + D_{n-1}^* D_{n-1} - D_{n-1} D_{n-1}^* \geq 0,$$

$$D_n C_n = C_n D_{n-1}$$

が、成立し $C_n D_{n-1} C_n^{-1}$ は、有界となる。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} \mathrm{cl\,ran}\ D_n &\subseteq \mathrm{cl\,ran}\ C_n, \\ \mathrm{cl\,ran}\ C_{n+1} &\subseteq \mathrm{cl\,ran}\ C_n \end{aligned}$$

が成立する。よって、各 $n \geq 1$ に対し、cl ran C_{n+1} から cl ran C_n への operator $\hat{C}_{n+1}$ を C_{n+1} の制限として定義でき、cl ran C_n から cl ran C_n への operator $\hat{D}_n$ を D_n の制限として定義できる。このとき、cl ran $C_1 \oplus$ cl ran $C_2 \oplus$ cl ran $C_3 \oplus \cdots$ 上の operator

$$\begin{pmatrix} \hat{D}_1^* & & & & \\ \hat{C}_2^* & \hat{D}_2^* & & & \\ & \hat{C}_3^* & \hat{D}_3^* & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

は、S の dual である。

S は、S の dual の dual であるので次が得られる。

定 理

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, そして次の式より、$E_n, F_n \in B(H)$ を帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} E_1 &= A, \quad F_1 = B, \\ E_n &= (E_{n-1}^2 + F_{n-1}^* F_{n-1} - F_{n-1} F_{n-1}^*)^{1/2}, \\ F_n &= E_n F_{n-1} E_n^{-1}, \end{aligned}$$

ただし、E_n^{-1} は、E_n の partial inverse とする。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$E_{n-1}^2 + F_{n-1}^* F_{n-1} - F_{n-1} F_{n-1}^* \geq 0,$$

$$F_n E_n = E_n F_{n-1}$$

が、成立し $E_n F_{n-1} E_n^{-1}$ は、有界となる。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} \mathrm{cl\,ran}\ F_n &\subseteq \mathrm{cl\,ran}\ E_n, \\ \mathrm{cl\,ran}\ E_{n+1} &\subseteq \mathrm{cl\,ran}\ E_n \end{aligned}$$

が成立する。よって、各 $n \geq 1$ に対し、cl ran E_{n+1} から cl ran E_n への operator $\hat{E}_{n+1}$ を E_{n+1} の制限として定義でき、cl ran E_n から cl ran E_n への operator $\hat{F}_n$ を F_n の制限として定義できる。このとき、S は、cl ran $E_1 \oplus$ cl ran $E_2 \oplus$ cl ran $E_3 \oplus \cdots$ 上の operator

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_1^* & & & & \\ \hat{E}_2^* & \hat{F}_2^* & & & \\ & \hat{E}_3^* & \hat{F}_3^* & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

とユニタリ同型となる。

これらを使って、次が得られる。

命 題

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator とするとき、S が self-dual subnormal operator となる必要十分条件は、cl ran$(S^*S - SS^*)$ 上の unitary operator U が存在して

$$\begin{aligned} U^*AU &= A, \\ U^*BU &= AB^*A^{-1}, \end{aligned}$$

となることである。ただし、A^{-1} は A の partial inverse とする。

定 理

$S \in B(H)$ を self-dual subnormal operator で $S^*|$cl ran$(S^*S - SS^*)$ が subnormal となるものとする。そのとき、 normal operator $N_0 \in B(H)$ と quasinormal operator $Q \in B(H)$ が存在して $N_0 Q = Q N_0$, $S = N_0 + Q$, $N_0 \cong N_0{}^*$ となる。

可換な normal operator と quasinormal operator の和で表される pure な operator について考える。

定 理

$S \in B(H)$ を pure operator とし、$S = N_i + Q_i$, N_i : normal, Q_i : quasinormal, $N_i Q_i = Q_i N_i$, $(i = 1, 2)$ とする。このとき、$N_1 = N_2$, $Q_1 = Q_2$ が成立する。

定 理

$S \in B(H)$ を pure subnormal operator とする。このとき S が $S = N + Q$, N : normal, Q : quasinormal, $NQ = QN$ という形で書けるための必要十分条件は、B が normal で $AB = BA$ となることである。

定 理

$S \in B(H)$ を pure operator で $S = N + Q$, N : normal , Q : quasinormal, $NQ = QN$ となるものとする。このとき、S が self-dual subnormal operator となるための必要十分条件は、unitary operator $V \in B(H)$ が存在して、

$$V^* N V = N^*, \ \ V^* Q V = Q$$

となることである。

参考文献

[1] T. Andô, *Matrices of normal extensions of subnormal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **24** (1963), 91–96.
[2] J. B. Conway, The dual of a subnormal operator, J. Operator Theory, **5**, no.2, (1981), 195-211.
[3] C. C. Huang, *On self-dual subnormal operators*, Journal of Fudan University, Natural Science, Fudan Xuebao, Ziran Kexue Ban, **24** (1985), no. 2, 225-233.
[4] I. Saito, *On self-dual subnormal operators*, Integral Equations and Operator Theory, **15** (1992), no.5, 864–878.
[5] I. Saito, *Andô's matrices for normal extensions of subnormal operators and their applications*, SUT Journal of Mathematics, **28** (1992), no.2.
[6] I. Saito, *On a pure operator that is the sum of mutually commutative normal operator and a quasinormal operator* , Acta Sci. Math. (Szege) **59** (1994), 129–141

p-hyponormal 作用素のスペクトル理論

都立三田高校　伊藤益生　上越教育大学　長　宗雄

§1. 準備

H を complex Hilbert space とし, $B(H)$ を H 上の有界線形作用素の全体とする. $T \in B(H)$ に対して

$$T : p-hyponormal \Leftrightarrow \ (T^*T)^p \geq (TT^*)^p$$

$$p = 1 \Leftrightarrow T : hyponormal, \ \ p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T : semi-hyponormal.$$

$$\begin{tikzcd}
 & p-hyponormal \arrow[dr] & \\
hyponormal \arrow[ur] \arrow[dr] & & paranormal \\
 & quasi-hyponormal \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

semi-hyponormal 作用素についての研究は

D. Xia ; Spectral Theory of Hyponormal Operators, Birkhäuser Verlag(1983)

にまとめられている.

p-H : set of all p-hyponormal operators

p-HU : p-hyponormal 作用素 T で polar 分解での U が unitary でとれるもの全体.

HN : set of all hyponormal operators.

SH : set of all semi-hyponormal operators.

SHU : semi-hyponormal 作用素 T で polar 分解での U が unitary でとれるもの全体.

$z = re^{i\theta} \in \sigma_{jp}(T)$ (joint point spectrum)

$\Leftrightarrow$ $\exists x \neq 0$ such that $(U - e^{i\theta})x = 0$ and $|T|x = rx$.

$z = re^{i\theta} \in \sigma_{ja}(T)$ (joint approximate point spectrum)

$\Leftrightarrow$ $\exists \{x_n\}$: unit vectors such that

$$(U - e^{i\theta})x_n \to 0 \text{ and } (|T| - r)x_n \to 0$$

$\sigma_p(T), \sigma_a(T)$ はそれぞれ T の point spectrum, approximate point spectrum を記す.

§ 2. 基本性質

$T \in p$-H とする. このとき次のような性質をもつ.

1. $\sigma(T) = \{z : \bar{z} \in \sigma_a(T^*)\}$

2. $Tx = zx \Longrightarrow T^*x = \bar{z}x$, 従って $ker(T - z) \subset ker(T^* - \bar{z})$

3. $\alpha, \beta \in \sigma(T)(\alpha \neq \beta)$, x と y は α, βに対する *eigenvectors* $\Longrightarrow x \perp y$.

4. $\sigma_p(T) = \sigma_{jp}(T)$ $\sigma_a(T) = \sigma_{ja}(T)$.

5. $r(T) = \| T \|$.

6. $0 \notin \sigma(T) \Longrightarrow \mathrm{T}^{-1} \in p$-H.

7. z : isolated point of $\sigma(T) \Longrightarrow z \in \sigma_p(T)$.

$T = U|T|$: polar 分解とする.

8. The eigenspaces of U reduce $|T|$.

9. U ; unitary and $\sigma(U) \neq \mathrm{T} \Longrightarrow$ The eigenspaces of $|T|$ reduce U.

10. $\sigma(|T|) \subset P(\sigma(T))$, ここで $P(re^{i\theta}) = r$.
このことから $r \in \sigma(T^*T) \Longrightarrow \exists z \in \sigma(T) : |z|^2 = r$ が成り立つ.

p を上げる方法として次の Aluthge 変換がある.

T : p-hyponormal $\Longrightarrow \tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$: $(p+\frac{1}{2})$-hyponormal.

最近, 古田先生は次のようにさらに一般化した. 同じ仮定の下で,

$|T|^q U|T|^q$ は $\frac{1}{2}(1+\frac{p}{q})$-hyponormal.

これらの一般化には古田不等式が極めて本質的な役割を果たしている.

基本的性質で次の 2 つが問題としてある.

1. p-hyponormal 作用素は convexoid か？

2. resolvent の評価式は？

2 については Xia の本の中で次の定理がある.

定理 4 . 3 (p.154). $T = U|T| \in \mathrm{SHU}$, $\sigma(U) \subset \{e^{i\theta} | \alpha_o + \alpha \leqq \theta \leqq 2\pi + \alpha_o - \alpha\}$. ここで $0 < \alpha < \pi$, $z = re^{i\eta}$, $\alpha_o + \alpha + \epsilon \leqq \eta \leqq 2\pi + \alpha_o - \alpha - \epsilon$,

$$\epsilon > 0 \implies \| (T-z)^{-1} \| \leqq \frac{c}{d(z, \sigma(T))},$$

ここで c は α と ϵ にのみ依存する定数.

§３．スペクトル写像定理

Cayley 変換と inverse Cayley 変換

H : hermitian に対して $L(H) = (H+i)(H-i)^{-1}$: Cayley 変換

U : unitary とする．$1 \notin \sigma(U)$ のとき　$L^{-1}(U) = i(U+I)(U-I)^{-1}$: inverse Cayley 変換

定理１．$T = H + iK \in \mathrm{HN}$ and $K \geqq 0$ とする．このとき

$$\sigma(\tau(T)) = \tau(\sigma(T))$$

ここで　$\tau(T) = (H+iI)(H-iI)^{-1}K$ and $\tau(x+iy) = (x+i)(x-i)^{-1}y$.

定理２．　$T = U|T| \in p\text{-HU}$ and $1 \notin \sigma(U)$ とする．
$\hat{T} = L^{-1}(U) + i|T|^{2p}$ とおくと

$$\sigma(\tau_p(\hat{T})) = \tau_p(\sigma(\hat{T}))$$

ここで $\tau_p(S) = L(H)K^{\frac{1}{2p}}$ ただし $S = H + iK$ で $K \geqq 0$ をみたすもの．

定理２では

$$\hat{T}^*\hat{T} - \hat{T}\hat{T}^* = 2i[L^{-1}(U), |T|^{2p}]$$

$$= 4(U-I)^{-1}(|T|^{2p} - U|T|^{2p}U^*)(U^*-I)^{-1} \geqq 0$$

であり，また

$$\tau(\hat{T}) = U|T|^{2p} \in \mathrm{SHU} \text{ and } \tau_p(\hat{T}) = U|T| \in p\text{-HU}$$

となっている．

次に $\mathcal{T}_0 = \{\psi : \mathrm{R}^+$ 上の単調増加関数で $\psi(0) = 0\}$ とする. $\psi \in \mathcal{T}_0$ に対して $\tilde{\psi}$ を次のように定義する.

$$\tilde{\psi}(re^{i\theta}) = e^{i\theta}\psi(r) \quad \text{および} \quad \tilde{\psi}(T) = U\psi(|T|).$$

ただし, $T = U|T|$ での U は unitary とする.

定理 3. $T = U|T| \in p - \mathrm{HU}$ とする. $\psi \in \mathcal{T}_0$ & $\tilde{\psi}(T) \in p - \mathrm{HU}$

$$\Rightarrow \sigma(\tilde{\psi}(T)) = \tilde{\psi}(\sigma(T)).$$

系 1. $T = U|T| \in p - \mathrm{HU}$ & $r \in \sigma(T^*T) \Rightarrow \exists z \in \sigma(T); |z| = \sqrt{r}.$

定理 3 で特に $\psi(t) = t^p$ とすれば $\tilde{\psi}(T) = U|T|^p \in \mathrm{HN}.$

$\psi(t) = t^{2p}$ とすれば $\tilde{\psi}(T) = U|T|^{2p} \in \mathrm{SH}.$

次に, $\mathrm{M} = \mathbf{R}$ または $\mathrm{M} = \mathbf{T}$ として $\mathrm{E} \subset \mathrm{M}$: closed bdd. set, に対して

(1) $\mathrm{M} = \mathbf{R}$ の場合

M(E) : set of all real Baire functions on E, S(E) $= \{\varphi \in$ M(E): $K_\varphi \geqq 0$ \}

ここで,

$\varphi \in$ M(E) に対して L^2(E) 上の作用素 K_φ を

$$(K_\varphi f)(x) = s - \lim_{\epsilon \to 0+0} \frac{1}{2\pi} \int \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - (y + i\epsilon)} f(y)dy$$

と定義する.

$M_0(\mathrm{E}) = \{ \varphi \in \mathrm{M(E)} : \varphi(x) \geqq 0, \varphi(0) = 0 \}$, $S_0(\mathrm{E}) = M_0(\mathrm{E}) \cap \mathrm{S(E)}$,

$\mathcal{R}$(E) : set of all strictly monotone increasing continuous functions on E,

として　$\mathcal{R}_0(\mathrm{E}) = M_0(\mathrm{E}) \cap \mathcal{R}(\mathrm{E})$.

(2) $\mathrm{M} = \mathbf{T}$ の場合

$M_0(\mathrm{E})$: set of all complex Baire functions on E, whose values are in T,

$S_0(\mathrm{E}) = \{\xi \in M_0(\mathrm{E}) : K_\xi \geqq 0\}$,

ここで,

$\xi \in M_0(\mathrm{E})$ に対して $L^2(\mathrm{E})$ 上の作用素 K_ξ を

$$(K_\xi f)(e^{i\theta}) = s - \lim_{\epsilon \to 0+0} \frac{1}{2\pi} \int \frac{1 - \xi(e^{i\theta})\overline{\xi(e^{i\eta})}}{1 - e^{i\theta}e^{-i\eta}(1-\epsilon)} f(e^{i\eta}) d\eta$$

と定義する.

$\mathcal{R}_0(E)$: set of all homeomorphisms preserving the direction on E, whose values are in E.

と定義する. このとき次の定理が成り立つ.

定理 4.　$T = U|T| \in p$–HU and $\xi \in \mathcal{R}_o(\sigma(U)) \cap S_o(\sigma(U))$.

(1) $\sigma(U) \neq \mathrm{T} \Longrightarrow \psi \in \mathcal{R}_o(\sigma(|T|^{2p})) \cap S_o(\sigma(|T|^{2p}))$

(2) $\sigma(U) = \mathrm{T} \Longrightarrow \psi \in \mathcal{R}_o([0, \|T\|^{2p}]) \cap S_o([0, \|T\|^{2p}])$

とする.

$$\varphi(re^{i\theta}) = \xi(e^{i\theta})(\psi(r^{2p}))^{\frac{1}{2p}} \quad \text{and} \quad \varphi(T) = \xi(U)(\psi(|T|^{2p}))^{\frac{1}{2p}}$$

と def. する. このとき

$$\varphi(T) \in p - \mathrm{HU} \text{ and } \varphi(\sigma(T)) = \sigma(\varphi(T))$$

が成り立つ.

§ 4. Putnam の不等式

Putnam の不等式は Xia 教授の本の中で semi-hyponormal 作用素まで拡張されていて次のように述べられる.

定理 5. $T \in p$–H, $(p \geqq \frac{1}{2})$

$$\Longrightarrow \|(T^*T)^p - (TT^*)^p\| \leqq \frac{p}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{2p-1}\, dr\, d\theta$$

同じ様に $0 < p < \frac{1}{2}$ に対してもスペクトル写像定理を用いると証明できる.

定理 6. $T \in p$–H, $(0 < p < \frac{1}{2})$ とする. このとき

$$\|(T^*T)^p - (TT^*)^p\| \leqq \frac{p}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{2p-1}\, dr\, d\theta$$

が成り立つ. 証明はまず $T = U|T| \in p$–HU のときに示す. このときは

$S = U|T|^{2p}$ とすると S は semi-hyponormal 作用素であるので

$$\|(S^*S)^{\frac{1}{2}} - (SS^*)^{\frac{1}{2}}\| \leqq \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma(S)} dr\, d\theta$$

が成り立つのでスペクトル写像定理を使って変数変換して示すことができる. 一般の場合は作用素 U は isometry であるので $H \oplus H$ 上の unitary 作用素に拡張して求める.

§ 5．Angular Cutting

$T = U|T| \in p-\mathrm{HU}, \mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$　とする．

$$U = \int_{\mathbf{T}} \lambda\, dE(\lambda) \text{ とスペクトル分解し}$$

$\gamma \subset \mathbf{T}$ に対し $E(\gamma) \neq 0$ とする．

$$H_\gamma = E(\gamma)H,\ U_\gamma = U\ |_{H_\gamma}\ ,\ T_\gamma = U_\gamma[E(\gamma)|T|^{2p}E(\gamma)]^{1/2p}$$

とすると

$$(T_\gamma^* T_\gamma)^p - (T_\gamma T_\gamma^*)^p = E(\gamma)((T^*T)^p - (TT^*)^p)E(\gamma)$$

より T_γ は H_γ 上の p-hyponormal 作用素となる．この T_γ を T の section という．

$$D_\gamma = \{\lambda : \lambda \neq 0, \lambda/|\lambda| \in D_\gamma\}$$

とおく．

定理７．$T \in p-\mathrm{HU}$ & $\gamma \subset \mathbf{T}$ に対して$\sigma(T_\gamma) \subset \overline{D_\gamma}$.

定理８．$T \in p-\mathrm{HU}$ & γ : open

$$\Rightarrow \quad \sigma(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma(T) \cap D_\gamma.$$

定理９．T : completely p-hyponormal $\Rightarrow$ T_γ : completely p-hyponormal.

§ 6.　General Polar Symbols

A を contraction とする.

$$A^{[n]} = \begin{cases} A^n\ , & n \geq 0, \\ (A^*)^n\ , & n < 0. \end{cases}$$

とし

$$s - \lim_{n \to \pm\infty} A^{[-n]} T A^{[n]}$$

が存在するとき, これらの作用素を　$S_A^{\pm}(T)$ と記し T の A による polar symbolds という.

$T = U|T| \in p - \mathrm{HU}$ のとき $S_U^{\pm}(T)$ は存在する.

そこで, $0 \leq k \leq 1$ に対して

$$T_{[k]} := U\{(1-k)S_U^{-}(|T|^{2p}) + k \cdot S_U^{+}(|T|^{2p})\}^{1/2p}$$

と記して, $T_{[k]}$ を T の general polar symbolds という.

基本性質

(1) $T = H + iK$ のとき　$\sigma_a(S_H^{\pm}(T)) \subset \sigma_a(T)$ and $\sigma(S_H^{\pm}(T)) \subset \sigma(T)$.

$T = U|T| \in \mathrm{SHU}$ のとき

(2) $\sigma_a(S_U^{\pm}(T)) \subset \sigma_a(T)$ and $\sigma(S_U^{\pm}(T)) \subset \sigma(T)$.

(3) $\mathcal{S}_U^-(|T|) \leqq |T| \leqq \mathcal{S}_U^+(|T|)$ and $\mathcal{S}_U^{\pm}(|T|)$ は normal 作用素

定理１０．$T = U|T| \in p-\mathrm{HU}$ とすると

$$\sigma(T) = \bigcup_{0\leq k\leq 1} \sigma(T_{[k]}).$$

最後にはじめの基本性質により次のことがわかる.

(1) $z \in \sigma_a(T) \Longleftrightarrow \exists\phi : C^*(T) \longrightarrow \mathbf{C}:$ $*-$*homomorphism such that* $\phi(T) = z.$

(2) Weyl's Theorem holds for p-hyponormal operators.

参考文献

[1] A. Aluthge, On p-hyponormal operator for $0 < p < 1/2$, Integral Equations and Operator Theory, 13(1990), 307-315.

[2] M. Chō, Spectral properties of p-hyponormal operators, Glasgow Math. J., 36(1994), 117-122.

[3] M. Chō and T. Huruya, p-Hyponormal operators for $0 < p < 1/2$, Commentationes Math., 33(1993), 23-29.

[4] M. Chō and M. Itoh, Putnam's inequality for p-hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 123(1995), 2435-2440.

[5] M. Chō and M. Itoh, On the angular cutting for p-hyponormal operators, Acta Sci. Math. (Szeged), 59(1994), 411-420.

[6] M. Chō and M. Itoh, On spectra of p-hyponormal operators, Integral Equations and Operator Theory, to appear.

[7] M. Chō, T. Huruya and M. Itoh, Spectra of completely p-hyponormal operators, Glasnik Mat., to appear

[8] M. Chō and H. Jin, On p-hyponormal operators, Nihonkai Math. J., to appear.

[9] M. Chō, S. Ōshiro and H. Segawa, Weyl's Theorem holds for p-hyponormal operators., preprint.

[10] M. Enomoto, M. Fujii and K. Tamaki, On normal approximate spectrum, Proc. Japan Acad., 48(1972), 211-215.

[11] M. Fujii, C. Himeji and A. Matsumoto, Theorems of Ando and Saito for p-hyponormal operators, Math. Japonica, 39(1993), 595-598.

[12] M. Fujii, S. Izumino and R. Nakamoto, Classes of operators determined by the Heinz-Kato-Furuta inequality and the Hölder-McCarthy inequality, Nihonkai Math. J., 5(1994), 61-67.

[13] T. Furuta, On convexoid operators, Sūgaku, 25(1973), 20-37 (in Japanese).

[14] T. Furuta, Generalized Aluthge transformation on p-hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[15] M. Itoh, Spectral mapping theorem for p-hyponormal operators, preprint.

[16] S. M. Patel, A note on p-hyponormal operators for $0 < p < 1$, Integral Equations and Operator Theory, 21(1995), 498-503.

[17] D. Xia, On nonnormal operators–semi-hyponormal operators, Sci. Sinica, 23(1983), 700-713.

[18] D. Xia, Spectral Theory of Hyponormal Operators, Birkhäuser 1983.

情報理論における最近の話題

山口大・工　柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)

1　はじめに

通信における数学的理論は１９４８年シャノンによって創設され，以来半世紀にわたって情報理論という学問としての１分野を形成しかつ周辺分野と深い関係をもちながら発展してきた．今日ではさらに広領域の分野を含む学問領域に位置する新しい分野を形成している．また情報革命とまでいわれるインターネット等，コンピュータの高性能，小型化によって新しい社会基盤が世界的に構築されようとしている．このような背景の中で従来の数学分野に新しい情報分野を取り込んだ形で大学等の教育研究機関の組織が改革されつつある．ところが組織を変えても旧態然とした「純粋数学こそ数学である」という空気がある限りは，かえって世の中の流れに逆行する危険すらはらんでいる．そこで数学，特に函数解析学に情報理論がどのように取り込めるかという１つの方向づけ，あるいはヒントを与えるものとしてこの報告をする．情報理論の中で中心的な概念の１つに通信路がある．通信路の数学的構成は一般の確率測度空間を用いてある程度完成しているといえるが（国澤・梅垣 [11], 梅垣 [15]）細かい議論に関しては未解決問題が多数残っている．この報告では入力空間および出力空間が無限次元空間の場合を想定し特にガウス型の通信路の構成を行う．なぜ無限次元空間かといえば，入力信号として連続時間確率過程を考えれば当然そのパス空間は無限次元空間となる．その上の確率測度が入力信号の分布の役割を演ずる．
まず第２章では無限次元空間の中でも最もポピュラーなバナッハ空間上の確率測度についてのよく知られた結果を述べる．これを用いてフィードバックを持たないガウス型通信路を定義し相互情報量や容量について言及する．
第３章ではフィードバックをもつガウス型通信路を扱うがフィードバックをもつ場合には測度による表現が不可能で時間パラメータが直接表に表れる確率過程による表現が必要になってくる．ここではまず離散時間の場合を扱い容量についての２，３の結果を与える．

最後に第４章で連続時間の場合を扱う.

2　バナッハ空間上の確率測度

X を実可分バナッハ (Banach) 空間, X^* をその共役空間とする. $\mathcal{B}(X)$ を X の Borel σ-集合体とする. X^* の有限次元部分空間 F に対して F に基づいた柱状集合 (cylinder set) C は次のように定義される.

$$C = \{x \in X; (< x, f_1 >, < x, f_2 >, \ldots, < x, f_n >) \in D\}$$

ただし $n \geq 1$, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset F$, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である. F に基づいた柱状集合全体を $\mathcal{C}_F$ とし,

$$\mathcal{C}(X, X^*) = \bigcup\{\mathcal{C}_F; F \text{ は } X^* \text{ の有限次元部分空間 }\}$$

とすると $\mathcal{C}(X, X^*)$ は集合体となる. $\hat{\mathcal{C}}(X, X^*)$ を$\mathcal{C}(X, X^*)$ によって生成される $\sigma-$ 集合体とすると$\hat{\mathcal{C}}(X, X^*) = \mathcal{B}(X)$ が成り立つ. μ を$\int_X ||x||^2 d\mu(x) < \infty$ を満たす $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の確率測度とすると, 次のような vector $m \in X$ と operator $R: X^* \to X$ が存在することがわかる. つまり任意の$x^* \in X^*, y^* \in Y^*$ に対して

$$< m, x^* >= \int_X < x, x^* > d\mu(x),$$

$$< Rx^*, y^* >= \int_X < x - m, x^* >< x - m, y^* > d\mu(x)$$

である. この m を μ の平均ベクトル (mean vector) という. R は有界線型作用素であり, μ の共分散作用素 (covariance operator) という. さらにこの R は対称 (symmetric) であり, つまり

$$\text{任意の } x^*, y^* \in X^* \text{ に対して } < Rx^*, y^* >=< Ry^*, x^* >$$

また正定値 (positive) でもある. つまり

$$\text{任意の } x^* \in X^* \text{ に対して } < Rx^*, x^* >\geq 0$$

任意の $f \in X^*$ に対して $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ が$\mathbb{R}$ 上のガウス測度となるとき μ を $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のガウス測度という. ガウス測度 μ の特性函数 $\hat{\mu}(f)$ は次のように表される. 任意の $f \in X^*$ に対して

$$\hat{\mu}(f) = exp\{i < m, f > -\frac{1}{2} < Rf, f >\} \tag{1}$$

ただし $m \in X$ は μ の平均ベクトル, $R: X^* \to X$ は μ の共分散作用素である. 逆に $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の確率測度 μ の特性函数が(1) の形をしていれば μ はガウス測度

となり $m \in X$ はその平均ベクトル, $R: X^* \to X$ はその共分散作用素となっている. したがって $\mu = [m, R]$ と書いて μ は平均ベクトル m, 共分散作用素 R をもつ $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のガウス測度を表すことにする.
任意に symmetric positive operator $R: X^* \to X$ が与えられると X のヒルベルト (Hilbert) 部分空間 H と H から X への連続な埋め込み j が存在して $R = jj^*$ となる. この辺の詳しい議論についてはVakhania-Tarieladza-Chobanyan [16] を見よ. この H を R の再生核ヒルベルト空間 (reproducing kernel Hilbert space) という. なぜこのような名前がつけられることが可能かというと次の理由のためである. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と X^* から $\mathcal{H}$ への有界線型作用素 A が存在して $A^*A = R$ かつ $A(X^*)$ は $\mathcal{H}$ で稠密である. ここで $\mathcal{H}_R = A^*(\mathcal{H})$ とする. また $k_R(x^*, y^*) =< Rx^*, y^* >$ と定義すると k_R は $X^* \times X^*$ 上の正定値函数となる. この k_R によってつくられる再生核ヒルベルト空間を $\mathcal{H}(k_R)$ とすると $\mathcal{H}(k_R) \cong \mathcal{H}_R$ である.
次に相互情報量を定義するために2つの実可分バナッハ空間 X, Y を用意する. μ_X, μ_Y をそれぞれ $(X, \mathcal{B}(X)), (Y, \mathcal{B}(Y))$ 上の確率測度, μ_{XY} を μ_X, μ_Y をそれぞれ周辺分布にもつような $(X \times Y, \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y))$ 上の結合確率測度とする. つまり

$$\text{任意の } A \in \mathcal{B}(X) \text{ に対して } \mu_X(A) = \mu_{XY}(A \times Y)$$

$$\text{任意の } B \in \mathcal{B}(Y) \text{ に対して } \mu_Y(B) = \mu_{XY}(X \times B)$$

が満たされる. さらに

$$\int_X ||x||^2 d\mu_X(x) < \infty, \quad \int_Y ||y||^2 d\mu_Y(y) < \infty$$

を仮定すると $m = (m_1, m_2) \in X \times Y$ が存在して次を満たす.
任意の $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ に対して

$$< (m_1, m_2), (x^*, y^*) >= \int_{X \times Y} < (x, y), (x^*, y^*) > d\mu_{XY}(x, y)$$

ただし m_1, m_2 はそれぞれ μ_X, μ_Y の平均ベクトルである. また

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} : X^* \times Y^* \to X \times Y$$

が存在して次を満たす.
任意の $(x^*, y^*), (z^*, w^*) \in X^* \times Y^*$ に対して

$$\begin{aligned} & < \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^* \\ w^* \end{pmatrix} > \\ = & \int_{X \times Y} < (x, y) - m, (x^*, y^*) >< (x, y) - m, (z^*, w^*) > d\mu_{XY}(x, y) \end{aligned}$$

ただし $R_{11}: X^* \to X$ は μ_X の共分散作用素, $R_{22}: Y^* \to Y$ は μ_Y の共分散作用素である. $R_{12} = R_{21}^*: Y^* \to X$ は次によって定義される.
任意の $(x^*, y^*) \in Y^* \times X^*$ に対して

$$< R_{12}y^*, x^* >= \int_{X\times Y} < x - m_1, x^* >< y - m_2, y^* > d\mu_{XY}(x, y)$$

この R_{12} は μ_{XY} の交差共分散作用素 (cross covariance operator) という.
$\mu_{XY} = \left[\begin{array}{cc} (0,0) & \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \end{array} \right]$ とすると $\mu_X = [0, R_X]$, $\mu_Y = [0, R_Y]$ となる. また R_X の再生核ヒルベルト空間 $H_X \subset X$ と R_Y の再生核ヒルベルト空間 $H_Y \subset Y$, さらに H_X から X への連続な埋め込み j_X と H_Y から Y への連続な埋め込み j_Y が存在し $R_X = j_X j_X^*$, $R_Y = j_Y j_Y^*$ となる.
ここでさらに再生核ヒルベルト空間 H_X が X で稠密, H_Y が Y で稠密と仮定すると有界線型作用素 $V_{XY}: H_Y \to H_X$ が存在して

$$R_{XY} = j_X V_{XY} j_Y, \quad ||V_{XY}|| \leq 1$$

を満たすようにできる. したがって次のような定理にまとめられる.

Theorem 1 $\mu_{XY} \sim \mu_X \otimes \mu_Y$ であるための必要十分条件は V_{XY} がヒルベルト・シュミット型 *(Hilbert-Schmidt type)* で $||V_{XY}|| < 1$ である.

情報理論で特に重要な役割を演ずる μ_{XY} の相互情報量 $I(\mu_{XY})$ は次のように定義される.

$$\mathcal{F} = \{(\{A_j\}, \{B_j\}); \{A_j\} \text{ は } \mu_X(A_j) > 0 \text{ となる } X \text{ の有限可測分割}, \{B_j\} \text{ は } \mu_Y(B_j) > 0 \text{ となる } Y \text{ の有限可測分割 } \}$$

とすると

$$I(\mu_{XY}) = \sup \sum_{i,j} \mu_{XY}(A_i \times B_j) \log \frac{\mu_{XY}(A_i \times B_j)}{\mu_X(A_i)\mu_Y(B_j)}$$

である. ただし上限はすべての $(\{A_i\}, \{B_j\}) \in \mathcal{F}$ についてとる.
この相互情報量は次のように表される.
$\mu_{XY} \ll \mu_X \otimes \mu_Y$ のとき

$$I(\mu_{XY}) = \int_{X\times Y} \log \frac{d\mu_{XY}}{d\mu_X \otimes \mu_Y}(x, y) d\mu_{XY}(x, y)$$

その他のとき $I(\mu_{XY}) = \infty$ とする.
以上より次の定理が成り立つ.

Theorem 2 $\mu_{XY} \sim \mu_X \otimes \mu_Y$ のとき $I(\mu_{XY}) < \infty$ で

$$I(\mu_{XY}) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-\gamma_n)$$

と表される. ただし $\{\gamma_n\}$ は $V_{XY}^* V_{XY}$ の固有値である.

いよいよフィードバックをもたないガウス型通信路を定義することができる. X を入力空間を表す実可分バナッハ空間, Y を出力空間を表す実可分バナッハ空間とする. $\lambda : X \times \mathcal{B}(Y) \to [0,1]$ は次の (1), (2) を満たすとする.

(1) 任意の $x \in X$ に対して $\lambda(x,\cdot) = \lambda_x$ は $(Y, \mathcal{B}(Y))$ 上のガウス測度である

(2) 任意の $B \in \mathcal{B}(Y)$ に対して $\lambda(\cdot, B)$ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のボレル可測函数である.

このとき 3 つ組 $[X, \lambda, Y]$ をガウス型通信路という.
入力情報源 μ_X を与えるとそれに対応して出力情報源 μ_Y 及び複合情報源μ_{XY} がそれぞれ次のように定義される.
任意の $B \in \mathcal{B}(Y)$ に対して

$$\mu_Y(B) = \int_X \lambda(x, B) d\mu_X(x),$$

任意の $C \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ に対して

$$\mu_{XY}(C) = \int_X \lambda(x, C_x) d\mu_X(x)$$

ただし $C_x = \{y \in Y; (x,y) \in C\}$ である.
通信路の容量とはある制約条件を満たす入力情報源 μ_X に対して相互情報量$I(\mu_{XY})$ の上限である. 容量の重要性はシャノンの第 2 符号化定理から保証されているのでただ単なる数学の遊びではないことに注意しておく.
簡単のため $X = Y$ で $\lambda(x, B) = \mu_Z(B - x)$, $\mu_Z = [0, R_Z]$ とする. つまり入力空間と出力空間は同じで雑音にあたるガウス測度 μ_Z が加法的に加わる通信路である. 制限として$\int_X \|x\|_Z^2 d\mu_X(x) \le P$ を与えると, その容量は$\frac{P}{2}$ であることが示される. また μ_W を別のガウス測度としたとき制限として$\int_X \|x\|_W^2 d\mu_X(x) \le P$ を与えたとき, この通信路は不適合ガウス型通信路といいその容量は Baker [1] により精密に得られている.

3　フィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路

次のようなフィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路を考える。

$$Y_n = S_n + Z_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ただし $Z=\{Z_n; n=1,2,\ldots\}$ は雑音を表す退化していない平均0のガウス過程、$S=\{S_n; n=1,2,\ldots\}$ と $Y=\{Y_n; n=1,2,\ldots\}$ はそれぞれ入力信号と出力信号を表す確率過程である。通信路は雑音のかからないフィードバックをもつとする。したがって S_n は送信するメッセージと出力信号 $Y_1,\ldots,Y_{n-1}$ の函数であるとして表される。 レート R, 長さ n の符号語 $x^n(W,Y^{n-1})$, $W\in\{1,\ldots,2^{nR}\}$ と復号函数 $g_n: \mathbb{R}^n \to \{1,2,\ldots,2^{nR}\}$ に対して、誤り確率は

$$Pe^{(n)} = Pr\{g_n(Y^n) \neq W; Y^n = x^n(W,Y^{n-1}) + Z^n\},$$

で定義される。ただし W は $\{1,2,\ldots,2^{nR}\}$ 上の一様分布で雑音 $Z^n=(Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)$ とは独立である。 入力信号には平均電力制限が課せられる。つまり

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[S_i^2] \leq P$$

である。またフィードバックは causal である。つまり $S_i (i=1,2,\ldots,n)$ は $Z_1,\ldots,Z_{i-1}$ に従属している。同様にフィードバックがない場合は S_i $(i=1,2,\ldots,n)$ は $Z^n=(Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)$ と独立である。
有限ブロック長容量は次のように定義される。

$$C_{n,FB}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|R_X^{(n)} + R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし $|\cdot|$ は行列式を表し、最大値は

$$Tr[(I+B)R_X^{(n)}(I+B^t) + BR_Z^{(n)}B^t] \leq nP$$

を満たす狭義下三角行列 B と 非負対称行列 $R_X^{(n)}$ についてとる。同様にフィードバックがないときには容量 $C_n(P)$ は $B=0$ としたときの最大値である。これらの条件の下で Cover and Pombra は次の結果を得た。

Theorem 3 (Cover-Pombra [2]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n=1,2,\ldots$ でブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P)-\epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n\to\infty$ のとき $Pe^{(n)} \to 0$ とできる。逆に任意の $\epsilon > 0$ とブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P)+\epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $Pe^{(n)} \to 0$ $(n\to\infty)$ が成り立たない。これはフィードバックをもたない場合も成り立つ。

ここではブロック長 n を固定したとき $C_{n,FB}(P)$ と $C_n(P)$ との間の関係に興味がある。$C_n(P)$ は正確に求められている。

Proposition 1 (Gallager [6])

$$C_n(P) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{nP + r_1 + \cdots + r_k}{kr_i},$$

ただし $0 < r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値、$k(\le n)$ は $nP + r_1 + \cdots + r_k > kr_k$ を満たす最大整数である。

ところで $C_{n,FB}(P)$ は正確には得られないので、今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている。

Theorem 4 (Ebert [5], Pinsker [13], Cover and Pombra [2])

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le 2C_n(P)$$

$R_Z^{11}(k)$ を $1,\ldots,k-1$ 行 $1,\ldots,k-1$ 列からなる $R_Z^{(n)}$ の部分行列、$R_Z^{12}(k)$ を $1,\ldots,k-1$ 行、$k,\ldots,n$ 列からなる $R_Z^{(n)}$ の部分行列、$R_Z^{21}(k) = R_Z^{12}(k)^t$ とする. このとき次を得る. これは P が大きいとき有効である.

Theorem 5 (Yanagi [19])

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le C_n(P_1),$$

ただし

$$P_1 = P + \sqrt{\frac{P}{n}}\{\sqrt{\sum_{k=2}^{n}\lambda_{\max}(\begin{pmatrix} R_Z^{11}(k) & R_Z^{12}(k) \\ R_Z^{21}(k) & R_Z^{21}(k)R_Z^{11}(k)^{-1}R_Z^{12}(k)\end{pmatrix})}$$
$$+\sqrt{Tr[R_Z^{(n)}] - |R_Z^{11}(2)| - \frac{|R_Z^{11}(3)|}{|R_Z^{11}(2)|} - \cdots - \frac{|R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{11}(n)|}}\}.$$

λ_{k-1} を $R_Z^{11}(k)$ の最小固有値とする. このとき次を得る. これは P が小さいとき有効である.

Theorem 6 (Yanagi [21])

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le C_n(P_2),$$

ただし $n=2$ のとき

$$P_2 = \frac{P^2}{2\lambda_1} + P,$$

$n \geq 3$ のとき

$$P_2 = \frac{nP^2}{\lambda_{n-1}} + P$$

である.

最近 Cover [3] により次のような conjecture が出されている.

Theorem 7 (open problem)

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq C_n(2P)$$

その他フィードバックをつけることにより容量が増加するための必要十分条件 (Yanagi [18])、遅れのあるフィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路の容量についての結果 (Yanagi [20])、さらにニューラルネットワークの根幹をなす多入力1出力通信路の容量領域の外界についての結果 (Yanagi [22]) 等興味ある話題もあるが紙面の都合上省略する.

4 フィードバックをもつ連続時間ガウス型通信路

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ を確率空間とする. 雑音 $Z = \{Z(t); 0 \leq t \leq T(< \infty)\}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上で定義された平均0の可分なガウス過程で

$$\int_0^T E[Z(t)^2]dt < \infty$$

を満たすとする. このときフィードバックをもつ不適合型連続時間ガウス型通信路は次のように与えられる.

$$Y(t) = S(t) + Z(t),\ 0 \leq t \leq T,$$

ただし $S = \{S(t); 0 \leq t \leq T\}$ と $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$ はそれぞれ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上で定義された入力信号過程と対応する出力信号過程である. フィードバックをもつことにより $S(t)$ はメッセージ X と出力信号 $Y(u), 0 \leq u \leq t$ のある函数として表される. 詳しくは省略する. $\|\cdot\|_W$ を Z とは異なる W の再生核ヒルベルト空間 H_W のノルムであるとすると、S に対する拘束条件

$$E\|S\|_W^2 \leq P$$

の下での通信路の容量を考える. $C_0(P)$ をフィードバックをもたない場合の容量、$C_f(P)$ をフィードバックをもつ場合の容量とする. $C_0(P)$ の値はBaker [1] により正確に得られているが、$C_f(P)$ に関しては離散時間のときと同様に全く得られていない. したがって $C_f(P)$ の上界を求めたい. 次のような仮定をする必要がある.

(G1) μ_W と μ_Z が strongly equivalent である. 即ち

$$R_Z = R_W^{1/2}(I+K)R_Z^{1/2}, \quad K \in (\tau c).$$

ここで (τc) はトレース・クラスの作用素全体を表す.

(G2) X のほとんどのパスが H_W に属する. 即ち

$$\mu_X[H_W] = 1.$$

(G3) $S = X - TY$, ただし $range(T) \subset H_W$, でかつ

$$T \in (\tau c),\ \sigma(T) = \{0\}.$$

ここで $\sigma(T)$ は T のスペクトルを表す.

次の定理を得る.

Theorem 8

$$C_0(P) \le C_f(P) \le 2C_0(P).$$

Theorem 9 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $C_0(P) \le C_f(P) \le \dfrac{1}{2}||(I+K)^{-1}||P,$

(2) $K = 0$ 又は $K \ge 0$ のとき $C_0(P) = C_f(P) = \dfrac{P}{2}.$

Theorem 10 次の (1), (2), (3) が成り立つ.

(1) $C_0(P) \le C_f(P) \le C_0(P^*),$
ただし

$$P^* = P + 2\sqrt{P}\sqrt{\sigma[K(I+K)^{-1/2}]}$$

である.

(2) すべての $\alpha\ (> \frac{1}{2})$ に対して

$$\lim_{P\to\infty} \frac{C_f(P) - C_0(P)}{P^\alpha} = 0.$$

(3) $\displaystyle\lim_{P\to\infty} \frac{C_f(P)}{C_0(P)} = 1.$

参考文献

[1] C. R. Baker, "Capacity of the mismathched Gaussian channel", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-33, pp 802-812, 1987.

[2] T. Cover and S. Pombra, "Gaussian feedback capacity", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-35, pp 37-43, January 1989.

[3] T. Cover and B. Gopinath, Open problems in communication and computation, Springer-Verlag, New York, 1987.

[4] A. Dembo, "On Gaussian feedback capacity", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-35, pp 1072-1089, September 1989.

[5] P. Ebert, "The capacity of the Gaussian channel with feedback", Bell. Syst. Tech. J., pp 1705-1712, 1970.

[6] R. G. Gallager, Information theory and reliable communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[7] 日合文雄、柳研二郎, ヒルベルト空間と線型作用素, 牧野書店, 1995.

[8] S. Ihara, "On the capacity of the discrete time Gaussian channel with feedback", Trans. Eighth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Vol C, Czecho. Acad. Sci., pp 175-186, 1978.

[9] S. Ihara and K.Yanagi, "Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II", Japan J. Appl. Math., Vol 6, pp 245-258, 1989.

[10] S. Ihara, Information theory for continuous systems, World Scientific, 1993.

[11] 国澤清典、梅垣壽春, 情報理論の進歩, 岩波書店, 1965.

[12] L. Ozarow, "Upper bounds on the capacity of Gaussian channels with feedback", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-36, pp 156-161, January 1990.

[13] M. Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.

[14] R. Schatten, Norm ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1960.

[15] 梅垣壽春, 情報数理の基礎, サイエンス社, 1993.

[16] N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze and S. A. Chobanyan, Probability distribution on Banach spaces, D.Reidel Publishing Company, 1987.

[17] K. Yanagi, "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback", Lecture Notes in Math., Vol 1299, pp 565-570, 1988.

[18] K. Yanagi, "On some properties of the continuous time Gaussian channels with strongly Volterra linear feedback", Proc. ISITA '92, pp 1342-1346, 1992.

[19] K. Yanagi, "Necessary and sufficient condition for capacity of the discrete time Gaussian channel to be increased by feedback", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-38, pp 1788-1791, Nobember 1992.

[20] K. Yanagi, "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, II", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-40, pp 588-593, March 1994.

[21] K. Yanagi, "On the capacity of the discrete time Gaussian channel with delayed feedback", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-41, pp 1051-1059, July 1995.

[22] K. Yanagi, "Upper bounds to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback", preprint, 1995.

[23] K. Yanagi, "On the outer bound of capacity region in non-white Gaussian multiple access channel with feedback", preprint, 1995.

755 山口県宇部市常盤台２５５７
山口大学工学部共通講座
0836-31-5100 (Ext 4911)
0836-35-9966 (Dial-in)
yanagi@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp (e-mail)

Hilbert C*-bimodule について

梶原 毅
岡山大学環境理工学部

本研究は、綿谷安男氏 (九州大学数理学研究科) との共同研究である。

昨年の本シンポジウムにおいて、有限型 Hilbert C*-bimodule の定義、Frobenius reciprocity, minimality および、dimension がある条件のもとで KK 上の character を与え、KK 類だけ決まることなどについて報告した。本講演では、Hilbert C*-bimodule についてその後わかったことを報告したい。

C*-category

中心がスカラーであるような C*環上の Hilbert C*-bimodule 全体は、何らかの category をなしていると考えられる。複雑な問題をさけるため、中心がスカラーであるような C*環の間の normalized minimal Hilbert C*bimoduel of finite type を object とし、${}_AX_B$ と ${}_AY_B$ の間の molphism としては、X から Y への有界線型写像 T で、

$$T(ax) = aT(x), \quad T(xb) = T(x)b, \quad {}_A\langle Tx, Ty\rangle = {}_A\langle x, y\rangle, \quad \langle Tx, Ty\rangle_B = \langle x, y\rangle_B$$

を満すものを採用する。そのとき、$\|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$ によって C* ノルムを導入すると、object と morphism の組は、C*-category になる。

さらに、$\{v_j\}_j$ を X の左 A base とする。$\varepsilon_X(q \otimes \overline{q}) = {}_A\langle p, q\rangle$, $\eta_X(b) = \sum_j b(\overline{v}_j \otimes v_j)$ とおくと、(ε_X, η_X) は上の category の rigidity と呼ばれるものになる。

Pimsner-Popa 型不等式

II_1 型因子環の包含関係 $N \subset M$ で M がら N への conditional expectation E があるとする。E が指数有限で $[M : N] = C$ であるとき、

$$E(x^*x) \geq C^{-1}x^*x$$

となることが、Pimsner-Popa によって知られており、これはフォン・ノイマン環の指数理論において、非常に重要な不等式である。Hilbert C*-bimodule においても同様の不等式がなりたつことが期待される。

A, B を単位元を持つような C*-環とし、${}_AX_B$ を Hilbert C*-bimodule of finite type とする。$\{u_i\}_i$ を X の右 B-basis、$\{v_j\}_j$ を X の左 A-basis とする。そのとき、次の不等式が成立する。

定理 任意の $x \in X$ に対して、

$$\|{}_A\langle x,x\rangle\| \le \|\sum_i {}_A\langle u_i,u_i\rangle\|\|\langle x,x\rangle_B\|$$

$$\|\langle x,x\rangle_B\| \le \|\sum_j \langle v_j,v_j\rangle_B\|\|{}_A\langle x,x\rangle\|$$

不等式の右辺に現れる定数は、左右の index の作用素としてのノルムである。ただし、Pimsner-Popa の不等式の場合と違って、両不等式に現われる定数は、包含関係でないときは、'best possible' ではない。

例 $X = \mathbf{C}^n$, $A = \mathbf{C}$, $B = \mathbf{C}$, A-値、Bl-値内積としては、通常の内積を採用する。そのとき、${}_A\langle x,x\rangle = \langle x,x\rangle_B$ が常になりたつが、不等式においては、n が現われる。

上の例は、左右の内積によって与えられるノルムが等しいことだけでは、imprimitivity bimodule にならないことも示している。imprimitivity bomodule になるためには、左右の index がともに一致していることが必要十分である。

Bundle Construction

Hilbert C*bimodule の、包含関係以外の系統的な例の構成法として、Yamagami-Kosaki の Bundle Construction を C*の場合にも適用することが可能である。

G を countable discrete group, H, K を有限部分群とする。有限次元ヒルベルト空間 V が G 上の H-K bundle であるとは、$V = \oplus_{g\in G} V_g$ と分解され、左からの H 作用と右からの K 作用があってそれぞれ V の内積を保存し、H, K の G への左右の作用と両立しているものとする。$sup(V) = \{g \in G : V_g \neq \{0\}\}$ とおく。A は単位元をもつ C*-環とし、α を G の A への properly outer な作用とする。H-K bundle V に対して、

$$\hat{V} = A \otimes {}_H V_K = \otimes_{g\in G}(A \otimes V_g)$$

とおく。$A \otimes V_g$ は、テンソル積により、左右の A 内積をもつ。

$P = A \times_\alpha H$, $Q \times_\alpha K$ とおく。$\hat{V}$ に対して、次のように P, Q 作用と内積を定義する。

(1) ${}_P\langle x,y\rangle(h)\sum_{g\in G} {}_A\langle x(g), (\alpha_h \otimes h)(y(h^{-1}g))\rangle$

(2) $\langle x,y\rangle_Q(k) = \sum_{g\in G} \alpha_g(\langle x(g^{-1}), y(g^{-1}k)\cdot k^{-1})\rangle_A$

(3) $(h\cdot x)(g)(\alpha_h \otimes h)(x(h^{-1}g))$ $\qquad (a\cdot x)(g) = ax(g)$

(4) $(x\cdot k)(g)x(gk^{-1})\cdot k$ $\qquad (x\cdot a)(g) = x(g)\alpha_g(a)$

n は $\mathrm{sup}(V)$ への H-作用の軌道の個数とし、m で $\mathrm{sup}(V)$ への K-作用の軌道の個数とする。

命題 $\hat{V}$ Hilbert C*-bimodule of finite type である。もし、$\mathrm{sup}(V)$ ただ一つの H-K double coset からなるとき $\mathrm{lind}[\hat{V}] = \|V\|n$、$\mathrm{rind}[\hat{V}] = \|V\|m$ であり、$\mathrm{Ind}[\hat{V}] = \|V\|^2 mn$ となる。ここで、$\|V\|$ は、$\mathrm{sup}(V)$ 上の共通の V_g の次元である。

また、G の作用が properly outer であることより、${}_HV_K$ が既約 bundle であるならば、$\hat{V}$ も既約 bimodule である。

Hilbert bimodule の接合積

ずいぶん以前 (1984)、Curto-Muhly-Williams と Comb が独立に、Imprimitivity bimodule の'equivariant system' $(X, A, B, \gamma, \alpha, \beta, G)$ を定義し、C*-接合積 $A \times_\alpha G$ と $B \times_\beta G$ が strongly Morita equivalent であり、"C*接合積" $X \times_\gamma G$ が equivalence を与えることを示した。

Hilbrt C*-bimodule は imprimitivity bimodule の一般化であるので、Hilbert C*-bimodule の接合積を定義し、やはり Hilbert C*-bimodule になることを示す。ただし、現状では単位元を持たない環のあつかいの問題があるので、離散群に限定しなければならない。

A, B を単位元を持つ C*-algebra とし、X を Hilbert A-B bimodule of finite type とする。そのとき、G を離散群とし、G の A, B への作用、α, β, G から Banach space X 上の有界線型作用素への準同形 γ が次の各条件をみたしているとする。

(1) $\gamma_{gh} = \gamma_g\gamma_h \quad \gamma_e = id$
(2) $\alpha_g({}_A\langle x, y\rangle) = {}_A\langle\gamma_g(x), \gamma_g(y)\rangle$
(3) $\beta_g(\langle x, y\rangle_B) = \langle\gamma_g(x), \gamma_g(y)\rangle_B$
(4) $\gamma(ax) = \alpha_g(a)\gamma_g(x), \quad \gamma_g(xb) = \gamma_g(x)\beta_g(x)$

接合積について、

$$A \times_\alpha G = \left\{\sum a_g u_g : a_g \in A\right\}$$
$$B \times_\beta G = \left\{\sum b_g v_g : b_g \in B\right\}$$

のような記号を用いる。一方、X の接合積を次のように定義する。

定義

$$X \times_\gamma G = \left\{\sum_{g\in G} x_g w_g : x_g \in X\right\}$$

以下のように Hilbert $A \times_\alpha G$-$B \times_\beta G$ 作用、内積を定義する。

(1) $(a_g u_g)(x_h w_h) = (a_g\gamma_g(x_h))w_{gh}$
(2) $(x_h w_h)(b_g v_g) = (x_h\beta_h(b_g))w_{hg}$
(3) ${}_{A\times_\alpha G}\langle x_g w_g, x_h w_h\rangle = {}_A\langle x_g, \gamma_{gh^{-1}}(x_h)\rangle u_{gh^{-1}}$
(4) $\langle x_g w_g, x_h w_h\rangle_{B\times_\beta G} = \beta_{g^{-1}}(\langle x_g, x_h\rangle_B)v_{g^{-1}h}$

さらに、X の右-B basis を $\{u_i\}_i$ とするとき、$\{u_i w_e\}_i$ は、$X \times_\gamma G_{B\times_\beta G}$ の右 $B \times_\beta G$-basis になることがわかる。左 base についても同様である。

命題 G が有限群のとき、$X \times_\gamma G$ のは、Hilbert C*-bimodule of finite type である。さらに、$\mathrm{rind}[X \times \gamma G] = \mathrm{rind}[X]v_e$, $\mathrm{lind}[X \times \gamma G] = \mathrm{lind}[X]u_e$ になる。

定理 G が無限群でも、適当な完備化を行うことにより、$X \times_\gamma G$ は Hilbert C*-bimodule of finite type である。C* 接合積を簡約接合積に変えても同じことが成りたつ。

G の X への' 作用' γ について、次の条件を考える。

条件
(1) 任意の $g \in G,\, g \neq e$ にたいして、次がなりたつ。すなわち、任意の $T_{\mathbf{C}}\,\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(X)$ に対して、

$$T(ax) = aT(x), \qquad T(xb) = T(x)\beta_g(b) \qquad x \in X, \quad a \in A, \quad b \in B$$

ならば $T = 0$ となる。
(2) 任意の $T \in {}_A\mathrm{End}_B({}_AX_B)$ に対して次がなりたつ。すなわち、任意の $g \in G,\, g \neq e$ に対して、$\gamma_g T = T\gamma_g$ ならば、$T = \mathbf{C}I$ が従う。

定理 上の二つの条件がみたされれば、$X \times_\gamma G$ は既約になる。

例 P を単純 C*-環、$G = \mathbf{Z}_2$、$X = P \oplus P$ とする。G の P 上の properly outer action δ が与えられているとする。G の P への作用 γ を $\gamma(x, y) = (\delta(y), \delta(x))$ によって定義する。また、$A = P,\, B = P$ とする。左右の作用を定義する。

$$a \cdot (x, y) = (ax, ay) \qquad (x, y) \cdot b = (xb, yb)$$

また、左右の内積も定義する。

$${}_A\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2^* + y_1y_2^* \qquad \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_B = x_1^*x_2 + y_1^*y_2$$

このとき、このシステムは、上の条件 (1), (2) をみたし、接合積 $X \times_\gamma G$ は既約である。
次に接合積の functorial な性質を調べる。次のことが言える。

命題
(1) $(X_1, A, B, \gamma_1, \alpha_1, \beta_1, G)$, $(X_2, A, B, \gamma_2, \alpha_2, \beta_2, G)$ があるとき、直和 $X = X_1 \oplus X_2$ 上に G の作用 γ があり、$X \otimes_\gamma G \simeq X_1 \times_{\gamma_1} G \oplus X_2 \times_{\gamma_2} G$ となる。
(2) $\overline{X \times_\gamma G} \simeq \overline{X} \times G$
(3) $(X, A, B, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(Y, B, C, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ にたいして、$(X \otimes_B Y)$ 上の作用、γ があって $(X \otimes_B Y) \times_\gamma G \simeq (X \times_{\gamma_1} G) \otimes_{X \times_{\beta_1} G} (Y \times_{\gamma_2} G)$ となる。

これから、接合積は既約性も含めて、カテゴリカルな性質を保存していることがわかる。
Bundle construction と bimodule の接合積とはどちらも functor の性質を持ち、類似点が多い。両者を一般化した構成を行なうことも可能である。$V = {}_HV_K$, $X = {}_AX_B$ であり、$(X, A, B, \gamma, \alpha, \beta, G)$ が equivariant system であるとする。

$$\hat{V} = X \otimes V = \sum_{g \in G} (X \otimes V_g)$$

とおき、接合積の場合と同様に $P = A \times_\alpha H$, $Q = A \times_\beta K$ として、$\hat{V}$ を Hilbert P-Q bimodule とすることができ、さらに、具体的に両側 finite base を構成することにより finite type であることもわかる。
この場合は、bundle と bimodule の双方について、bivariant な functor と見ることができ、テンソル積、分解などのついて記述することが可能である。

その他の話題

Abadie, Eilers, Exel 等は $\mathbf{Z}$ による接合積の一般化として、Hilbert A-A bimodule X による A の接合積 $A \times_X \mathbf{Z}$ を定義し、種々の性質を調べている。ただし、彼らが定義した Hilbert C*-bimodule は、imprimitivity bimodule のようなものであり、しかも左右が同じ C*-環になっている。

$X = {}_AX_B$ が imprimitivity bimodule で、左右の環が違うときにも標準的に C*環を定義することを考える。具体的な例に対して生成される環を調べている。

単位元を持たない C*-環をあつかう場合はさまざまな困難がある。たとえば、有限でないコンパクト群で bundle construction を考えようとすると、有限 base が取れないことが問題となる。また、bases がある場合も、取り扱いは困難である。

References

T.Kajiwara and Y.Watatani, Jones Index Theory by Hilbert C*-Bimodules and K-Theory, preprint

H.Kosaki and S.Yamagami, Irreducible Bimodules Associated with Crossed Product Algebras, International J.Math.

R.E.Curto, P.S.Muhly and D.P.Williams, Crossed Products of Strongly Morita equivalent C*-algebras, Proc.AMS.90(1984)

F.Combs, Crossed products and Morita equivalence, Proc.London Math.(1984)

離散群の単調完備 C^*-代数への coaction について

濱名　正道（富山大学　教育学部）

１９９５年１１月２９日

1　序論

C^*-代数は, その自己共役部分において任意の有界単調増大ネットが上限をもつとき, 単調完備 (monotone complete) と呼ばれる。von Neumann 代数は単調完備であり, 単調完備 C^*-代数は Kaplansky の意味での AW^*-代数である。

本講演では, 離散群 Γ を与えたとき, Γ の coaction δ をもつ単調完備 C^*-代数 B の *-代数としての構造を, δ の固定部分代数（単調完備 C^*-代数となる）A と Γ に関する情報で完全に記述する事を目標とする。より正確には, このような B が, Γ の A への "twisted action" (θ, u) に関する, A の Γ による"twisted crossed product"$A \times_{\theta,u} \Gamma$ として表示でき, この (θ, u) が"coboundary"を除き一意的に定まる事を示す。ここで, θ は Γ 上で定義され, A の "偏 *-同型"(partial *-automorphism) を値とする写像であり, u は $\Gamma \times \Gamma$ 上で定義され, A の partial isometries を値とする, θ に関する"2-cocycle(multiplier)"である。従って, Bと Γ を初めに与えたときの, Γ の B への coaction の研究は, $B \cong A \times_{\theta,u} \Gamma$ となる可能性のある A と (θ, u) を求める事に帰着する。しかし, ここでは一般論のみを考え, 具体的な Γ と A を与えたときにどのような Γ の A への twisted actions が存在し得るか, 等の問題には立ち入らない。

表題には,"coaction"という言葉を用いたが, 以下では, むしろ上記のような B を A 上の Γ-graded *-代数と見る立場を取る。そのとき, 次の二点が我々の議論の基礎になる:

(I) B の grading における各 B_γ は, A のある偏 *-同型 θ_γ を用いて記述できる。

(II) B の *-代数としての構造は, 対応 $B_\gamma \longmapsto (B_\gamma)^*$, $(B_{\gamma_1}, B_{\gamma_2}) \longmapsto B_{\gamma_1} B_{\gamma_2} (\subset B_{\gamma_1\gamma_2})$ 及び同一視 $(B_\gamma)^* = B_{\gamma^{-1}}$, 包含写像 $B_{\gamma_1} B_{\gamma_2} \hookrightarrow B_{\gamma_1\gamma_2}$ によって定まるが, これらは上の θ_γ と A の partial isometries を用いて記述できる。

Γ が特に可換のときには, 離散群 Γ の coaction を考える事は, Γ の双対群 (compact 可換群になる) の action を考える事と同等であり, von Neumann 代数への compact 可換群（あるいは, 他の群）の action は多くの人々によって研究されてきた。ここでは, 次の二つについてのみ言及する。compact 可換群 G の ergodic action をもつ von Neumann 代数は, G の双対群 Γ 上の（１次元 torus $\mathbb{T}$ に値を取る）通常の 2-cocycle を用いて記述でき

るが ([1],[5]), これは, 上記の状況で $A = \mathbf{C}$ の場合, 従って θ の値が自明（$\mathbf{C}$ 上の恒等写像または0）で, この 2-cocycle が u となる場合, に相当する。また, 竹崎 [6] は, homogeneous periodic state φ をもつ von Neumann 代数 M（従って, 周期的 modular 自己同型群 σ^{φ} は $\mathbb{T}$ の作用と見なせる）が, 固定部分代数 M_{φ} の, ある M_{φ} の偏 *-同型による"接合積"として表せる事を示した。これは, 上の状況で, $\Gamma = \mathbf{Z}$ であり, θ が一個の偏 *-同型で生成され, u が自明になる場合に相当する。

2 離散群の（単調完備）C^*-代数への coaction と可逆（自己共役）C^*-加群

この節では, 離散群 Γ の C^*-代数及び単調完備 C^*-代数への coaction を同時に取り扱い, これらの coaction の研究が, 固定部分代数上の Γ-graded *-代数の研究と同等である事を示す。

定義 2.1. δ が Γ の（単調完備）C^*-代数 B への coaction $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\delta : B \to B \otimes C_r^*(\Gamma)$ $[\delta : B \to B \bar{\otimes} R(\Gamma)]$ は $(\delta \otimes \mathrm{id}_{C_r^*(\Gamma)}) \circ \delta = (\mathrm{id}_B \otimes \delta_\Gamma) \circ \delta$ $[(\delta \bar{\otimes} \mathrm{id}_{R(\Gamma)}) \circ \delta = (\mathrm{id}_B \bar{\otimes} \delta_\Gamma) \circ \delta]$ を満たす *-単準同型（unital 正規 *-単準同型）. ここで $C_r^*(\Gamma)$ $[R(\Gamma)]$ は Γ の右正則表現 ρ の像で生成される C^*-(von Neumann) 代数, δ_Γ は $R(\Gamma)$ 上の余積 $[\delta_\Gamma(\rho(\gamma)) = \rho(\gamma) \otimes \rho(\gamma)]$, $B \otimes C_r^*(\Gamma)$ $[B \bar{\otimes} R(\Gamma)]$ は極小 C^*-テンソル積（Fubini 積 [3]）.

このとき $B_\gamma := \{x \in B : \delta(x) = x \otimes \rho(\gamma)\}$ $(\gamma \in \Gamma)$ は次の条件を満たす B のノルム閉（単調閉）部分空間である:

(1) $$(B_\gamma)^* = B_{\gamma^{-1}}, \qquad B_{\gamma_1} B_{\gamma_2} \subset B_{\gamma_1 \gamma_2} \quad (\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma).$$

また B_e の上への（正規）条件付期待値 $\epsilon : B \to B_e$ が, $x \longmapsto \delta(x) = \sum_\gamma x_\gamma \otimes \rho(\gamma) \longmapsto x_e$ によって定義され,

(2) $$\epsilon(B_\gamma) = 0 \quad (\gamma \neq e).$$

今後, A は固定した（単調完備）C^*-代数を表すとし, 次の条件を満たす coaction δ のみを考える:

(3) $$\begin{cases} \text{(i) 固定部分代数 } B^\delta := B_e = A; \\ \text{(ii) } B \text{は,（単調完備）} C^*\text{-代数として } \sum_\gamma B_\gamma \text{によって生成される。} \end{cases}$$

定義 2.2. (i)（代数的 Γ-graded *-代数）*-代数 A に対して, *-代数 B が A 上 Γ-graded とは, B が条件 (1) 及び $B_e = A$ を満たす直和分解 $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ をもつときをいう。

(ii) [(単調完備)C^*-版]（単調完備）C^*-代数 A に対して（単調完備）C^*-代数 B が A 上 Γ-graded とは, (1), (2), (3) を満たすノルム閉（単調閉）部分空間 B_γ 及び（正規）条件付期待値 $\epsilon : B \to B_e = A$ が存在するときをいう。

定義 2.3. (i) A が C^*-代数のとき, (θ, X) が **可逆 A-加群** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X は右 Hilbert A-加群（内積 $<\cdot,\cdot>$ は右側の変数について線型とする）, $\theta : A \to \mathrm{End}_A(X)$ (X 上の adjoint をもつ有界加群準同型の作る C^*-代数）は, 次の条件を満たす *-準同型:

$$K(X) \subset \theta((\mathrm{Ker}\,\theta)^{\perp}), \tag{4}$$

ここで, $K(X)$ は階数１の作用素 (i.e., $x\cdot<y,\cdot>: z \mapsto x\cdot<y,z>$) 全体の閉線型包（$\mathrm{End}_A(X)$ の両側イデアルになる）, $(\mathrm{Ker}\,\theta)^{\perp} := \{x \in A : x(\mathrm{Ker}\,\theta) = 0\}$.

(ii) A が単調完備 C^*-代数のとき, 可逆 A-加群 (θ, X) が **自己共役** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X は自己共役（従って $\mathrm{End}_A(X)$ は単調完備）, θ は正規（従って θ は onto).

可逆 A-加群 (θ, X) に対して, X を $a\cdot x\cdot b = \theta(a)x\cdot b$ によって両側 A-加群と見なし, 誤解の虞れのないとき θ を省略する。

定理 2.4. (i) δ が, (3) を満たす（単調完備）C^*-代数 B への coaction のとき, 定義 2.1 における B_γ, ϵ に関して B は A 上 Γ-graded である。逆に,（単調完備）C^*-代数 A に対して,（単調完備）C^*-代数 B が, B_γ, ϵ に関して A 上 Γ-graded ならば, これら B_γ, ϵ を定義 2.1 におけるように回復する Γ の B への coaction が存在する。

(ii) B が B_γ, ϵ に関して A 上 Γ-graded （単調完備）C^*-代数ならば, B_γ を, A の元の右側からの掛け算と A 値内積 $<x,y>= x^*y$ によって右（自己共役）Hilbert A-加群と見なし, A の元の左側からの掛け算によって A の $\mathrm{End}_A(B_\gamma)$ への（正規）*-準同型を定義すると, B_γ は可逆（自己共役）A-加群となる。逆に, 任意の可逆（自己共役）A-加群 X は, このような B_γ として実現できる。即ち, ある A 上 $\mathbf{Z}$-graded な（単調完備）C^*-代数 B が存在し, $B_1 = X$ となる。

3 （単調完備）C^*-代数の Picard 半群

前節の議論から,（単調完備）C^*-代数 A 上の Γ-graded（単調完備）C^*-代数 B の *-代数としての構造は, 可逆（自己共役）A-加群 B_γ に関する対応 $B_\gamma \longmapsto (B_\gamma)^*$, $(B_{\gamma_1}, B_{\gamma_2}) \longmapsto B_{\gamma_1}B_{\gamma_2}$ 及び同一視 $(B_\gamma)^* = B_{\gamma^{-1}}$, 包含写像 $B_{\gamma_1}B_{\gamma_2} \hookrightarrow B_{\gamma_1\gamma_2}$ を記述する事によって定まる。この節では, この観点から, これら二つの対応を演算とする, 可逆（自己共役）A-加群のなす逆半群 (inverse semigroup)— A の **Picard 半群**と呼ぶ—を導入する。Picard という名称は, C^*-代数 A に対する Picard 半群が [2] の意味での Picard 群を部分群として含む事に因る。ここで, **逆半群**とは, 任意の元 x に対して $xx^{-1}x = x$, $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ を満たす元 x^{-1} （x の逆元と呼ぶ）が一意的に存在するような半群である。

A を固定した C^*-代数とし, 可逆 A-加群全体を Mod-A と書く。$X \in$ Mod-A に対して, A の二つのノルム閉両側イデアルを次式で定義する（$\overline{\mathrm{lin}}$ は閉線型包を表す）:

$$K_l(X) = \theta^{-1}(K(X)) \subset (\mathrm{Ker}\,\theta)^{\perp}, \quad K_r(X) = \overline{\mathrm{lin}} <X,X> .$$

($\theta \mid (\mathrm{Ker}\,\theta)^{\perp}$ が単射だから, $\theta^{-1} := (\theta \mid (\mathrm{Ker}\,\theta)^{\perp})^{-1}$ は意味をもつ。) Mod-A の２元の間の, 内積を保存する両側 A-加群準同型を **単準同型**, 上への単準同型を **同型** と呼ぶ。

$(\theta, X) \in \mathrm{Mod}\text{-}A$ に対して, その逆元 $(\theta, X)^{-1} \in \mathrm{Mod}\text{-}A$ を次のように定義する。$X^* := \{x^* : x \in X\}$ 上で, スカラー積, 加群演算, 内積を

$$\lambda x^* = (\bar{\lambda} x)^*, \quad a \cdot x^* \cdot b = (\theta(b^*) x \cdot a^*)^*, \quad <x^*, y^*> = \theta^{-1}(x \cdot <y, \cdot>) \in (\mathrm{Ker}\,\theta)^{\perp} \subset A$$

で定義し, *-準同型 $\theta_{-1} : A \to \mathrm{End}_A(X^*)$ を $\theta_{-1}(a)x^* = a \cdot x^*$ で定義すると

$$X^{-1} = (\theta, X)^{-1} := (\theta_{-1}, X^*) \in \mathrm{Mod}\text{-}A, \quad \mathrm{Ker}\,\theta_{-1} = K_r(X)^{\perp}.$$

更に, $K_r(X^{-1}) = K_\ell(X)$ がいえ,

$$(X^{-1})^{-1} = X$$

が示せる。

Mod-A における積 $\otimes_A$ を次のように定義する。$(\theta_j, X_j) \in \mathrm{Mod}\text{-}A$ $(j = 1,\ 2)$ に対して, 代数的テンソル積 $X_1 \odot_{\mathbb{C}} X_2$ 上での加群演算 $(x_1 \otimes x_2) \cdot a = x_1 \otimes x_2 \cdot a$, 内積 $<x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2> = <x_2, \theta_2(<x_1, y_1>) y_2>$ から誘導される Hilbert A-加群を $X_1 \otimes_{\theta_2} X_2$ と書く。$\tilde{\theta}_1 : A \to \mathrm{End}_A(X_1 \otimes_{\theta_2} X_2)$ を $\tilde{\theta}_1(a)(x_1 \otimes x_2) = (\theta_1(a)x_1) \otimes x_2$ によって定義すると

$$X_1 \otimes_A X_2 := (\tilde{\theta}_1, X_1 \otimes_{\theta_2} X_2) \in \mathrm{Mod}\text{-}A$$

が分かる。

A が更に単調完備のとき, 可逆自己共役 A-加群全体を S.D.Mod-A と書き, 上と同様に, 逆元, 積 $\overline{\otimes}_A$ を定義する。即ち, X^{-1} は上記と同じとし, $X_1 \overline{\otimes}_A X_2$ は $X_1 \otimes_A X_2$ の自己共役完備化 ([4]) とする。

$X \in \mathrm{Mod}\text{-}A$ の同型類を $[X]$, $[\mathrm{Mod}\text{-}A] = \{[X] : X \in \mathrm{Mod}\text{-}A\}$, etc. と書く。

定理 3.1. A が C^*-代数のとき, [Mod-A] は次の演算に関して逆半群である:

$$[X_1] \cdot [X_2] := [X_1 \otimes_A X_2], \qquad [X]^{-1} := [X^{-1}].$$

A が更に単調完備のとき, [S.D.Mod-A] についても同様。

この [Mod-A] ([S.D.Mod-A]) を(単調完備)C^*-代数 A の **Picard 半群** と呼ぶ。

4 偏 *-同型

この節では, 単調完備 C^*-代数 A の Picard 半群 [S.D.Mod-A] を, A の偏 *-同型と関連付け, その演算を, 写像の逆写像, 写像の合成を用いて記述する。この演算は $\mathrm{Out}\,A = \mathrm{Aut}\,A/\mathrm{Inn}\,A$ の群演算を拡張したものであり, [S.D.Mod-A] は $\mathrm{Out}\,A$ を部分群として含む事が分かる。A の射影全体, partial isometries 全体, 中心を, それぞれ Proj A, P.I. A, $Z(A)$ と書く。

A の **偏 *-同型** (partial *-automorphism) とは, A の被約部分代数の間の *-同型, i.e.,

*-同型 θ: $eAe \to fAf$, $e, f \in \mathrm{Proj}\, A$ をいい, このとき $e = \ell(\theta)$, $f = r(\theta)$ と書く。ある $u \in$ P.I.A に対して, $\mathrm{Ad}\, u$: $u^*uAu^*u \to uu^*Auu^*$, $(\mathrm{Ad}\, u)(x) = uxu^*$, と表せる偏 *-同型を **内部的**という。 A の偏 *-同型全体を P.Aut A と書く。 $\theta_1, \theta_2 \in$ P.Aut A が $C(\ell(\theta_1))C(\ell(\theta_2)) = 0 = C(r(\theta_1))C(r(\theta_2))$ ($C(\cdot)$ は射影の中心包を表す) を満たすとき, 直和 $\theta_1 \oplus \theta_2 \in$ P.Aut A を,

$\ell(\theta_1 \oplus \theta_2) := \ell(\theta_1) + \ell(\theta_2)$, $r(\theta_1 \oplus \theta_2) := r(\theta_1) + r(\theta_2)$
(従って $\ell(\theta_1 \oplus \theta_2)A\ell(\theta_1 \oplus \theta_2) = \ell(\theta_1)A\ell(\theta_1) + \ell(\theta_2)A\ell(\theta_2)$, $r(\cdot)$ についても同様);
$(\theta_1 \oplus \theta_2)(x_1 + x_2) := \theta_1(x_1) + \theta_2(x_2)$, $x_j \in \ell(\theta_j)A\ell(\theta_j)$

で定義する。$\theta \in$ P.Aut A, $h, k \in \mathrm{Proj}\, Z(A)$ に対して, $k{\cdot}\theta{\cdot}h \in$ P.Aut A を,

$$\ell(k{\cdot}\theta{\cdot}h) := h\theta^{-1}(kr(\theta)),\ r(k{\cdot}\theta{\cdot}h) := \theta(h\ell(\theta))k,\ k{\cdot}\theta{\cdot}h := \theta \mid \ell(k{\cdot}\theta{\cdot}h)A\ell(k{\cdot}\theta{\cdot}h)$$

で定義し, $\theta{\cdot}h = 1{\cdot}\theta{\cdot}h$, $k{\cdot}\theta = k{\cdot}\theta{\cdot}1$ と書くと,

$$\theta = \theta \cdot h \oplus \theta \cdot (1-h) = k \cdot \theta \oplus (1-k) \cdot \theta.$$

定義 4.1. $\theta \in$ P.Aut A が正 (負, 中心的) $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\ell(\theta) \in Z(A)$ $[r(\theta) \in Z(A);\ \ell(\theta), r(\theta) \in Z(A)]$.
$\theta \in$ P.Aut A が **正則** (regular) $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2$ (θ_1 は正, θ_2 は負) と表せる。
正の (中心的, 正則) 偏 *-同型全体を $(\mathrm{P.Aut}\, A)^+$ $[(\mathrm{P.Aut}\, A)^0$, R.P.Aut $A]$ と書く。

$\theta \in$ R.P.Aut A に対して, $<\theta>\in$ S.D.Mod-A を次のように定義する。初めに $\theta \in (\mathrm{P.Aut}\, A)^+$ のとき, $r(\theta)A$ を, $x \cdot a = xa$, $<x, y>= x^*y$ で定義される自己共役 Hilbert A-加群と見なし, θ を上への正規 *-準同型 $A \to \mathrm{End}_A(r(\theta)A) = r(\theta)Ar(\theta)$, $a \mapsto \theta(\ell(\theta)a)$, と同一視して得られる S.D.Mod-$A$ の元を $<\theta>$ と書く。次に $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2$ (θ_1 は正, θ_2 は負) のとき $<\theta>:=<\theta_1> \oplus <(\theta_2)^{-1}>^{-1}$ と定める。即ち, $<\theta>= r(\theta_1)A \oplus A\ell(\theta_2)$ であり,

$$a \cdot (x_1 \oplus x_2) \cdot b = \theta_1(a)x_1b \oplus ax_2(\theta_2)^{-1}(b),$$
$$<x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2>= x_1^*y_1 + \theta_2(x_2^*y_2).$$

定理 4.2. 任意の $X \in$ S.D.Mod-A に対して, $X \cong <\theta>$ となる $\theta \in$ R.P.Aut A が存在する。即ち, $<\theta>$ の同型類を $[\theta]$ と書くと,

$$[\text{S.D.Mod}-A] = \{[\theta] : \theta \in \text{R.P.Aut}\, A\}.$$

同型写像 $<\theta>\cong<\psi>$ ($\theta, \psi \in$ R.P.Aut A) は, 次の結果により, 記述できる。

命題 4.3. $\theta, \psi \in (\mathrm{P.Aut}\, A)^+$ とする。
(i) $<\theta>\cong<\psi> \Longleftrightarrow \ell(\theta) = \ell(\psi)$, $\exists u \in$ P.I.$A : u^*u = r(\theta)$, $\psi = (\mathrm{Ad}\, u) \circ \theta$. このときの同

型写像は $x \mapsto ux,\ x \in r(\theta)A$ で与えられる。

(ii) $<\theta>\cong<\psi>^{-1} \iff r(\theta) \leq \ell(\psi),\ r(\psi) \leq \ell(\theta), \exists u \in \mathrm{P.I.}\,A : uu^* = \ell(\theta),\ \psi \mid r(\theta)Ar(\theta) = (\mathrm{Ad}\,u^*) \circ \theta^{-1}$. このときの同型写像は $x \mapsto u\psi(x),\ x \in r(\theta)A \subset \ell(\psi)A$ で与えられる。

定義 4.4（同値関係 $\sim$）. $\theta, \psi, \ldots \in \mathrm{P.Aut}\,A$ に対して,

$\theta \leq \psi \overset{\text{def}}{\iff} \ell(\theta) \leq \ell(\psi) \leq C(\ell(\theta)),\ \psi \mid \ell(\theta)A\ell(\theta) = \theta;$

$\theta \cong \theta_1 \overset{\text{def}}{\iff} \exists u, v \in \mathrm{P.I.}\,A : uu^* = \ell(\theta),\ v^*v = r(\theta),\ \theta_1 = (\mathrm{Ad}\,v) \circ \theta \circ (\mathrm{Ad}\,u);$

$\theta \prec \psi \overset{\text{def}}{\iff} \exists \theta_1 : \theta \cong \theta_1 \leq \psi;$

$\theta \sim \psi \overset{\text{def}}{\iff} \exists \omega : \omega \prec \theta,\ \omega \prec \psi.$

$\sim$ は $\mathrm{P.Aut}\,A$ 上の同値関係になる。θ の同値類を $\{\theta\}$ と表し, これら全体を $\{\mathrm{P.Aut}\,A\}$ と書く。

命題-定義 4.5（正則化）. 任意の $\theta \in \mathrm{P.Aut}\,A$ に対して, $\theta \prec \psi$ となる $\psi \in \mathrm{R.P.Aut}\,A$ が, $\sim$ を除き一意的に定まる。この ψ を θ の**正則化**と呼ぶ。

一般の $\theta \in \mathrm{P.Aut}\,A$ に対する $<\theta> \in \mathrm{S.D.Mod}\text{–}A$ を $<\psi>$（ψ は θ の正則化）として定義する。

定義 4.6（$\mathrm{P.Aut}\,A$ の２元の合成）. $\theta, \psi \in \mathrm{P.Aut}\,A$ に対して,

$$r(\theta) \geq u^*u,\ uu^* \leq \ell(\psi),\ C(u^*u) = C(r(\theta))C(\ell(\psi))$$

となる $u \in \mathrm{P.I.}\,A$ を選び, $\psi \circledcirc \theta := \psi \circ (\mathrm{Ad}\,u) \circ \theta \in \mathrm{P.Aut}\,A$（定義域は $\theta^{-1}(u^*u)A\theta^{-1}(u^*u)$）を θ, ψ の合成と呼ぶ（これは u に関係するが, $\sim$ を除き一意的に定まる）。

定理 4.7. $\theta, \psi \in \mathrm{P.Aut}\,A$ に対して,

$$<\theta>\cong<\psi> \iff \theta \sim \psi;\quad <\theta>\ \overline{\otimes}_A <\psi>\cong<\psi \circledcirc \theta>;\quad <\theta>^{-1}\cong<\theta^{-1}>.$$

従って $\{\mathrm{P.Aut}\,A\}$ は, 演算 $\{\psi\} \cdot \{\theta\} = \{\psi \circledcirc \theta\},\ \{\theta\}^{-1} = \{\theta^{-1}\}$ によって逆半群になり, 対応 $[\mathrm{S.D.Mod}\text{–}A] \to \{\mathrm{P.Aut}\,A\},\ [\theta] \mapsto \{\theta\}$, は逆半群としての反同型写像である。

注意. (1) 特に $\theta, \psi \in (\mathrm{P.Aut}\,A)^+$ のときは, $\psi \circ \theta \in (\mathrm{P.Aut}\,A)^+$ であり, 同型写像 $<\theta>\ \overline{\otimes}_A <\psi>\cong<\psi \circ \theta>$ が $x \otimes y \mapsto \psi(x)y$ によって与えられる。

(2) 一般に, $\theta, \psi \in \mathrm{R.P.Aut}\,A$ であっても $\psi \circledcirc \theta \notin \mathrm{R.P.Aut}\,A$（例えば, θ が負, ψ が正のとき）. これが, $\mathrm{R.P.Aut}\,A$ の元だけでなく, 一般の $\mathrm{P.Aut}\,A$ の元も考え, 定義 4.4,4.5 によって $\mathrm{P.Aut}\,A$ と $\mathrm{R.P.Aut}\,A$ を関連付ける必要がある理由である。

(3) $\theta, \psi \in \mathrm{Aut}\,A$ のとき $\theta \sim \psi \iff \exists\,\mathrm{unitary}\ u \in A : \psi = (\mathrm{Ad}\,u) \circ \theta$. 従って $\mathrm{Out}\,A \subset \{\mathrm{P.Aut}\,A\}$.

(4) A が特に AW^*-因子のとき, $\{\mathrm{P.Aut}\,A\} \setminus \{0\}$ は $\mathrm{Out}\,A$ を正規部分群として含む群である。更に, A が σ-finite, properly infinite ならば, $\{\mathrm{P.Aut}\,A\} \setminus \{0\} = \mathrm{Out}\,A$ であり, A が II_1 型 W^*-因子ならば, $[\{\mathrm{P.Aut}\,A\} \setminus \{0\}]/\mathrm{Out}\,A$ は Murray-von Neumann の意味での A の基本群と同型である。

5 Twisted crossed products

以下で, A, Γ はそれぞれ $\mathbf{C}$ 上の unital $*$-代数, 離散群を表す。P.Aut A, (P.Aut $A)^+$, P.I. A, 等の定義は, 単調完備 C^*-代数の場合と同様である。

定義 5.1. (i) 組 (B,t) が A の Γ による **代数的 twisted crossed product** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $B=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$ は A 上の Γ-graded $*$-代数; $t:\Gamma\to \mathrm{P.I.}\,B$, $\gamma\mapsto t_\gamma$, は以下の条件を満たす:

$$\begin{cases} t_e=1_B=1_A=:1;\ B_\gamma=t_\gamma A+A(t_{\gamma^{-1}})^*; \\ B^+:=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(B_\gamma)^+\,[\,(B_\gamma)^+:=t_\gamma A]\text{ は } B \text{ の部分代数}; \\ B^+ + (B^+)^*=B. \end{cases}$$

特に, $B_\gamma=t_\gamma A=At_\gamma$ （従って $B^+=B$）のとき, (B,t) を **中心的**と呼ぶ。

(ii) 二つの twisted crossed products $(B^j,t^j)\,(j=1,2)$ が共役 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\pi:B^1\to B^2$ $*$-同型 s.t. $\pi((B^1_\gamma)^+)=(B^2_\gamma)^+$, $\forall\gamma\in\Gamma$.

定義 5.2. (i) 組 (θ,u) が Γ の A への **twisted action** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\theta:\Gamma\to(\mathrm{P.Aut}\,A)^+$, $\gamma\mapsto\theta_\gamma$, $u:\Gamma\times\Gamma\to\mathrm{P.I.}\,A$, $(\gamma_1,\gamma_2)\mapsto u(\gamma_1,\gamma_2)$, は以下の条件を満たす ($\ell(\theta_\gamma)=:\ell(\gamma)$, $r(\theta_\gamma)=:r(\gamma)$, $\ell(\theta_{\gamma_2}\circ\theta_{\gamma_1})=:\ell(\gamma_1,\gamma_2)$, etc. と略記する): $\forall\gamma_j\in\Gamma$:

(5.1) $\theta_e=\mathrm{id}_A$;
(5.2) $\ell(\gamma_1,\gamma_2)\le\ell(\gamma_1\gamma_2)$;
(5.3) $(\mathrm{Ad}\,u(\gamma_1,\gamma_2))\circ\theta_{\gamma_2}\circ\theta_{\gamma_1}=\theta_{\gamma_1\gamma_2}\cdot\ell(\gamma_1,\gamma_2)$;
(5.4) $u(\gamma_1,\gamma_2)u(\gamma_1,\gamma_2)^*=\theta_{\gamma_1\gamma_2}(\ell(\gamma_1,\gamma_2))$, $u(\gamma_1,\gamma_2)^*u(\gamma_1,\gamma_2)=r(\gamma_1,\gamma_2)$;
(5.5) $u(\gamma,e)=u(e,\gamma)=r(\gamma)$;
(5.6) $u(\gamma_1\gamma_2,\gamma_3)\theta_{\gamma_3}(u(\gamma_1,\gamma_2))=u(\gamma_1,\gamma_2\gamma_3)u(\gamma_2,\gamma_3)$;
(5.7) $\ell(\gamma_2)(1-\ell(\gamma_1^{-1}))\theta_{\gamma_1}(r((\gamma_1\gamma_2)^{-1}))=0$;
(5.8) $\ell(\gamma_1^{-1})(1-\ell(\gamma_2))\theta_{\gamma_1}(\ell(\gamma_1\gamma_2))=0$;
(5.9) $(1-\ell(\gamma_2))\theta_{\gamma_1}(\ell(\gamma_1\gamma_2)r(\gamma_1^{-1}))=0$;
(5.10) $(\ell(\gamma_1)-\ell(\gamma_1,\gamma_1^{-1}\gamma_2))(\ell(\gamma_2)-\ell(\gamma_2,\gamma_2^{-1}\gamma_1))=0$;
(5.11) $\theta_{\gamma_1}(1-\ell(\gamma_1\gamma_2^{-1},\gamma_2))A\theta_{\gamma_2}(1-\ell(\gamma_2\gamma_1^{-1},\gamma_1))=0$;
(5.12) $(\ell(\gamma_1)-\ell(\gamma_1,\gamma_1^{-1}))\theta_{\gamma_2\gamma_3}(r(\gamma_2^{-1})(\ell(\gamma_2)-\ell(\gamma_2,\gamma_3)))=0$.

(ii) Γ の A への twisted action (θ,u) に対して, (α,v) が (θ,u)-**coboundary** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha\in\mathrm{Aut}\,A$; $v:\Gamma\to\mathrm{P.I.}\,A$, $\gamma\mapsto v_\gamma$, $v_\gamma^*v_\gamma=\alpha(r(\theta_\gamma))$, $\forall\gamma\in\Gamma$.

定理 5.3 (twisted crossed product の A, Γのみを用いた表示).

(i) 次式は, A の Γ による代数的 twisted crossed products (B,t) と Γ の A への twisted actions (θ,u) の間の双射を定義する:

$$\theta_\gamma=(\mathrm{Ad}\,t_\gamma^*)\mid A,\ \ u(\gamma_1,\gamma_2)=(t_{\gamma_1\gamma_2})^*t_{\gamma_1}t_{\gamma_2}.$$

即ち, (B,t) を与えると, 上式によって (θ,u) が定義でき, 逆に (θ,u) を与えると上式を満たす (B,t) が定まる。特に, (B,t) が中心的のときは, $\theta_\gamma\in(\mathrm{P.Aut}\,A)^0$ であり, 条件 (5.7)-(5.12) は他の条件 (5.1)-(5.6) より従う。

(ii) Γ の A への twisted action (θ,u) と (θ,u)-coboundary (α,v) に対して, 次式によって新しい twited action (θ',u') が定義できる:

$$\begin{cases} \theta'_\gamma = (\mathrm{Ad}\, v_\gamma)\circ\alpha\circ\theta_\gamma\circ\alpha^{-1}, \\ u'(\gamma_1,\gamma_2) = (v_{\gamma_1\gamma_2})^*\alpha(u(\gamma_1,\gamma_2))(\alpha\circ\theta_{\gamma_2}\circ\alpha^{-1})(v_{\gamma_1})v_{\gamma_2}. \end{cases}$$

このとき (θ,u), (θ',u') に対応する twisted crossed products (B,t), (B',t') は互いに共役である。逆に, (B,t), (B',t') が共役な twisted crossed products, (θ,u), (θ',u') が対応する twisted actions のとき, ある (θ,u)-coboundary (α,v) が存在し, 上式が成立する。

(i) における (θ,u) から (B,t) の構成: Γ の A への twisted action (θ,u) に対して, 形式的変数 t_γ と以下の関係式で定義される, 有限和 $\sum_\gamma (t_\gamma a_\gamma + a'_\gamma(t_{\gamma^{-1}})^*)$ $(a_\gamma,\ a'_\gamma \in A)$ 全体を B とし, $B_\gamma = t_\gamma A + A(t_{\gamma^{-1}})^*$ とする:

$$t_\gamma a + a'(t_{\gamma^{-1}})^* = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} r(\gamma)a(1-\ell(\gamma^{-1})) = 0,\ (1-\ell(\gamma))a'r(\gamma^{-1}) = 0, \\ u(\gamma,\gamma^{-1})\theta_{\gamma^{-1}}(a) + \ell(\gamma)a'r(\gamma^{-1}) = 0. \end{cases}$$

B における involution と積を次式で定義する:

$$\begin{aligned}
&(t_\gamma a + a'(t_{\gamma^{-1}})^*)^* := t_{\gamma^{-1}}a'^* + a^*(t_\gamma)^*;\\
&(t_{\gamma_1}a)(t_{\gamma_2}b) := t_{\gamma_1\gamma_2}u(\gamma_1,\gamma_2)\theta_{\gamma_2}(a)b;\\
&t_{\gamma_1}a(t_{\gamma_2})^* := t_{\gamma_1\gamma_2^{-1}}(\theta_{\gamma_2})^{-1}(u(\gamma_1\gamma_2^{-1},\gamma_2)^* a r(\gamma_2))\\
&\qquad\qquad + (1-\ell(\gamma_1\gamma_2^{-1}))(\theta_{\gamma_1})^{-1}(r(\gamma_1)au(\gamma_2\gamma_1^{-1},\gamma_1))(t_{\gamma_2\gamma_1^{-1}})^*;\\
&(t_{\gamma_1})^*t_{\gamma_2} := t_{\gamma_1^{-1}\gamma_2}u(\gamma_1,\gamma_1^{-1}\gamma_2)^* + (1-\ell(\gamma_1^{-1}\gamma_2))u(\gamma_2,\gamma_2^{-1}\gamma_1)(t_{\gamma_2^{-1}\gamma_1})^*.
\end{aligned}$$

以下で A は単調完備 C^*-代数を表すとする。

定義 5.4. Γ の A への twisted action (θ,u) に対して, A の Γ による代数的 twisted crossed product (B,t) を自然に単調完備化して得られる Γ-graded 単調完備 C^*-代数を A の Γ による **twisted crossed product** と呼び, $A\times_{\theta,u}\Gamma$ と書く。(このとき $B_\gamma \in$ S.D.Mod-A であり, これらが $A\times_{\theta,u}\Gamma$ の grading を与える。) (B,t) が中心的のとき, $A\times_{\theta,u}\Gamma$ も**中心的**という。

定義 5.5. (i) $X \in$ S.D.Mod-A の直和因子 $Y \in$ S.D.Mod-A が X の**正部分** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\theta \in (\mathrm{P.Aut}\,A)^+ : Y \cong <\theta>$, かつこの性質に関して Y は最大。

(ii) Γ の A への twisted action (θ,u) が**極大正** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\gamma\in\Gamma : B_\gamma^+ := t_\gamma A$ が $B_\gamma = t_\gamma A + A(t_{\gamma^{-1}})^*$ の正部分。

定理 5.6. (i) A 上の任意のΓ-graded 単調完備 C^*-代数 B は,coboundary を除き一意的に定まる, 極大正 twisted action (θ,u) に関する twisted crossed product $A\times_{\theta,u}\Gamma$ として表せる。

(ii) A が特に σ-finite, properly infinite のとき, 上の B は 中心的twisted crossed product として表せる。

証明の方針: 上記の B に対して定まる $B_\gamma \in$ S.D.Mod-A の正部分を $(B_\gamma)^+$ とし, $(B_\gamma)^+ \cong <\theta_\gamma>$ となる $\theta_\gamma \in (\mathrm{P.Aut}\,A)^+$ を選ぶ。$<\theta_\gamma> = \tau(\theta_\gamma)A$ の元 $\tau(\theta_\gamma)$ に移る $(B_\gamma)^+$ の元を t_γ とし, $B := \sum_\gamma B_\gamma$, $t : \gamma \mapsto t_\gamma$, とすると (B, t) が代数的 twisted crossed product となる事が分かる。従って, 定理 5.3 により (θ, u) が定義できる。また, 一意性は, 二つの極大正 twisted actions に対する twisted crossed products が, Γ-graded *-代数として共役 (i.e., gradings を保存する *-同型が存在する) ならば, 必然的に定義 5.1(ii) の意味で共役になる事から従う。

参考文献

[1] S. Albeverio and R. Høegh-Krohn, Ergodic actions by compact groups on C^*-algebras, Math.Z. 174 (1980), 1-17.

[2] L.G. Brown, P. Green and M.A. Rieffel, Stable isomorphisms and strong Morita equivalence of C^*-algebras, Pacific J. Math. 71 (1977), 349-363.

[3] M. Hamana, Tensor products for monotone complete C^*-algebras, I, Japanese J. Math.(N.S.) 8 (1982), 259-283.

[4] M. Hamana, Modules over monotone complete C^*-algebras, International J. Math. 3 (1992), 185-204.

[5] D. Olesen, G.K. Pedersen and M. Takesaki, Ergodic actions of compact abelian groups, J. Operator Theory 3 (1980), 237-269.

[6] M. Takesaki, The structure of a von Neumann algebra with a homogeneous periodic state, Acta Math. 131 (1973), 79-122.